Basilejský problém devětkrát jinak

Jan Haluza

Abstrakt. V tomto článku podrobně rozebereme celkem devět řešení tzv. basilejského problému (hledání součtu převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel). První publikované řešení od L. Eulera využívá rozkladu „nekonečného polynomu“ na součin kořenových činitelů. Druhé řešení pracuje s Taylorovým rozvojem funkce arkussinus a rekurentním vzorcem pro jistý určitý integrál, třetí je založeno na vztazích mezi goniometrickými funkcemi a exponenciálou a výpočtu limity s využitím l'Hospitalova pravidla. Ve čtvrtém řešení odvodíme výsledek pomocí Parsevalovy rovnosti. V pátém nám poslouží transformace dvojného integrálu a Fubiniova věta. V následujících dvou jsou primárními nástroji funkce gama, digama a trigama. V prvním z nich převedeme problém pomocí funkce digama na výpočet limity, ve druhém pak na základě fyzikální interpretace dostaneme hledaný výsledek jako hodnotu funkce trigama v určitém bodě. Předposlední postup využívá teorii pravděpodobnosti a vzorec pro hustotu podílu dvou náhodných veličin. Poslední se pak opět vrací ke vztahům mezi goniometrickými funkcemi a exponenciálou, pomocí nichž vypočítáme jistý integrál.

1. Basilejský problém

Na přelomu 17. a 18. století matematikové běžně pracovali s nekonečnými řadami. Jedním z nich byl Jakob Bernoulli, který zkoumal řady ve tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$. Pro $p = 1$ se jedná o harmonickou řadu, pro kterou Bernoulli znal důkaz její divergence. Dále se zabýval případem $p = 2$. Tento problém již o několik desetiletí dříve nastínil Pietro Mengoli. Bernoulli nedospěl k součtu řady, avšak zaznamenal určitý posun v řešení problému – dokázal, že řada konverguje. K tomu použil srovnávací kritérium (viz [2]), přičemž hledaný součet shora omezil řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$, kde $n_k = \frac{k(k+1)}{2}$ je k-té trojúhelníkové číslo. Jednoduchou úpravou ukázal, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\right] = \\ = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\right] = 2 \cdot 1 = 2.$$

Ze srovnávacího kritéria pak plyne konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

V díle *Tractatus de seriebus infinitis* z roku 1689 vyzval Bernoulli ostatní matematiky k nalezení součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Protože během psaní pobýval v Basileji, začal být tento problém nazýván basilejský. Nevyřešen zůstal ještě dalších 46 let. V roce 1731 se o něj začal zajímat tehdy 24letý Leonhard Euler, který po čtyřech letech dospěl k řešení. Ukázal, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.1}$$

Bc. Jan Haluza, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Kotlářská 2, 611 37 Brno, e-mail: `499997@muni.cz`

2. Eulerova cesta k řešení

V této kapitole se podíváme na počátky Eulerova zkoumání a v následujících třech kapitolách se pak budeme zabývat jeho jednotlivými řešeními.

Stejně jako všichni jeho předchůdci zkoušel Euler napřed vyhodnocovat částečné součty. Problém byl ve velmi pomalé konvergenci řady. Pro ilustraci uveďme vztahy

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2} \approx 1{,}549\,77,$$
$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} \approx 1{,}634\,98,$$
$$\sum_{k=1}^{1\,000} \frac{1}{k^2} \approx 1{,}643\,93.$$

Posoudíme-li dnes, kdy známe explicitní výsledek, přesnost těchto aproximací, vidíme, že i částečný součet pro $n = 1\,000$ má přesnost pouze 0,01. Již na počátku bádání Euler objevil možnost zrychlení konvergence. K tomu využil následující integrál, který vyčíslil dvěma způsoby:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\ln(1-t)}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

Nejprve nahradil logaritmus jeho rozvojem do mocninné řady (viz [2])

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \ldots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}, \quad t \in [-1, 1),$$

a po dosazení do integrálu a následné integraci člen po členu získal výsledek

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(1-t)}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}}{t} \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k} \,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{k-1}}{k} \,\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{k-1} \,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k^2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ve druhém způsobu zavedl substituci $s = 1 - t$, čímž integrál převedl na tvar

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(1-t)}{t} \,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1 \cdot \ln s}{1-s} \,\mathrm{d}s.$$

Výraz $\frac{1}{1-s}$ lze interpretovat jako součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ a dostáváme

$$\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1 \cdot \ln s}{1-s} \,\mathrm{d}s = \int_1^{\frac{1}{2}} \ln s \sum_{k=0}^{\infty} s^k \,\mathrm{d}s = \int_1^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} s^k \ln s \,\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^{\frac{1}{2}} s^k \ln s \,\mathrm{d}s.$$

Pomocí integrace per partes pak lze spočítat

$$\int_1^{\frac{1}{2}} s^k \ln s \, \mathrm{d}s = \left[\frac{s^{k+1}}{k+1} \ln s\right]_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1} \int_1^{\frac{1}{2}} s^k \, \mathrm{d}s = \left[\frac{s^{k+1}}{k+1} \ln s - \frac{s^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^{\frac{1}{2}}.$$

Sečtením přes $k = 0, 1, 2, \ldots$ dostaneme

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{s^{k+1}}{k+1} \ln s - \frac{s^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[\ln s \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \ldots\right) - \left(s + \frac{s^2}{4} + \frac{s^3}{9} + \ldots\right)\right]_1^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[\ln s \left(-\ln\left(1-s\right)\right) - \left(s + \frac{s^2}{4} + \frac{s^3}{9} + \ldots\right)\right]_1^{\frac{1}{2}} = \\
&= -\left(\ln \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{4} + \frac{\frac{1}{2^3}}{9} + \ldots\right) + \ln 1 \cdot \ln 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \\
&= -\left(\ln \frac{1}{2}\right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k^2} + \ln 1 \cdot \ln 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Výrazem $\ln 1 \cdot \ln 0$ se Euler dále nezabýval, nicméně pomocí l'Hospitalova pravidla lze ukázat, že je $\lim_{s \to 1^-} \ln s \cdot \ln\left(1-s\right) = 0$. Porovnáním výsledků (2.1) a (2.2) dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k^2} + \ln^2 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{1-k}}{k^2} + \ln^2 2, \qquad (2.3)$$

kde nová řada konverguje podstatně rychleji. Již pro 14 členů dostaneme hodnotu sumy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ s přesností na 6 desetinných míst.

3. První Eulerovo řešení

V této kapitole čerpáme stejně jako v předchozí ze zdroje [3]. Jedním z klíčů k řešení basilejského problému je Eulerův předpoklad, že pravidla, platná pro polynomy (například rozklad na součin kořenových činitelů), fungují i pro „polynomy nekonečného stupně“, což jsou vlastně mocninné řady.

1. řešení. Euler uvážil „nekonečný polynom“

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \qquad (3.1)$$

Hodnota $x = 0$ jistě není jeho kořenem, mohl tedy předpokládat $x \neq 0$. Rozšířením polynomu (3.1) zlomkem $\frac{x}{x}$ dostal v čitateli rozvoj funkce sinus, tj.

$$\frac{x \cdot P(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{x} = \frac{\sin x}{x}. \qquad (3.2)$$

Z toho plyne, že kořeny polynomu (3.1) jsou nenulové celočíselné násobky π, proto jej můžeme rozložit na součin

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)\dots$$

Vynásobením sousedních dvojic závorek Euler obdržel

$$P(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\dots$$

Na závěr takto vzniklé závorky roznásobil a dal dohromady koeficienty u x^2, tj.

$$P(x) = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots\right)x^2 + \dots \tag{3.3}$$

Porovnáním koeficientů v rovnostech (3.1) a (3.3) dostal

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots\right),$$

odkud po drobných úpravách plyne $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

4. Druhé Eulerovo řešení

Vyřešením basilejského problému se Euler okamžitě proslavil, nicméně se objevily i pochybnosti o korektnosti jeho postupu. Například odvození rozkladu funkce sinus na nekonečný součin skutečně není v pořádku. Tato rovnost však platí a lze ji korektně dokázat, viz např. [15], sekce 8.6. Euler proto vypracoval jiný důkaz, založený na odlišném postupu využívajícím mimo jiné rozvoj funkce arkussinus do mocninné řady a jejího vyjádření pomocí integrálu

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in [-1, 1]. \tag{4.1}$$

V této kapitole opět pracujeme se zdrojem [3].

Budeme potřebovat zobecněnou binomickou větu, která má tvar

$$(1 + x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1),\ a \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Tento vztah lze odvodit jakožto Maclaurinovu řadu funkce $x \mapsto (1 + x)^a$ za využití Cauchyova tvaru Taylorova zbytku. Podrobnosti viz [2], [11].

Pro jednodušší zápis mocninné řady pro arkussinus se nám bude hodit tzv. dvojnásobný faktoriál.

Definice 4.1. Dvojnásobný faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}$ definujeme jako

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n - 2) \dots 4 \cdot 2, & n \text{ sudé}, \\ n \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 1, & n \text{ liché}. \end{cases}$$

Dosadíme-li do vztahu (4.2) hodnoty $x = -t^2$, $a = -\frac{1}{2}$, dostaneme argument integrálu z rovnosti (4.1). Jeho rozvoj do mocninné řady je tedy

$$\begin{aligned}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} &= \binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-t^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-t^2)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}(-t^2)^3 + \ldots = \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-t^2) + \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}t^4 + \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-t^6) + \ldots = \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}t^6 + \ldots = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Věta 4.2. *Pro funkci arkussinus platí*

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right), \quad x \in [-1, 1].$$

Důkaz. Rovnost plyne ze vztahu (4.1), do kterého dosadíme (4.3) a integrujeme člen po členu. □

Věta 4.3. *Platí*

$$\frac{1}{2}\arcsin^2 x = \int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in [-1, 1]. \tag{4.4}$$

Definujeme-li

$$I_n := \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

pak platí

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{4.5}$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Důkaz. První rovnost dostaneme po zavedení substituce $u = \arcsin t$ v integrálu

$$\int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\arcsin x} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\arcsin x} = \frac{1}{2}\arcsin^2 x.$$

Přesuňme se nyní k rekurentnímu vztahu (4.5) a integrujme per partes:

$$\begin{aligned} I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t & \left| \begin{array}{ll} u' = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} & u = -\sqrt{1-t^2} \\ v = t^{n+1} & v' = (n+1)t^n \end{array} \right| = \\ &= \left[-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\sqrt{1-t^2}\right)(n+1)t^n\,\mathrm{d}t = \\ &= (n+1)\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^1 t^n \cdot \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \\ &= (n+1)\int_0^1 \frac{t^n - t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}). \end{aligned}$$

Po roznásobení závorek a převedení druhého integrálu doleva dostaneme

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n,$$

odkud plyne dokazovaný vztah. Spočítejme nyní počáteční hodnoty. Pro $n = 0$ máme

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin t]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

a pro $n = 1$ platí

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^1 = 1.$$

□

Nyní máme vše připraveno pro druhé Eulerovo řešení basilejského problému.

2. řešení. Dosazením $x = 1$ do rovnosti (4.4) získáme

$$\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arcsin^2 1 = \frac{\pi^2}{8}. \tag{4.6}$$

Nahrazením funkce arkussinus jejím rozvojem do mocninné řady z věty 4.2 obdržíme

$$\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{1}{2k+1}\int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\right). \tag{4.7}$$

Z předchozího výpočtu víme, že první integrál je roven 1 a s využitím matematické indukce podle k a rekurentního vztahu (4.5) lze dokázat, že platí

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{1}{2k+1}I_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2},$$

odkud plyne

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{1}{2k+1}I_{2k+1}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}. \tag{4.8}$$

Kombinací rovností (4.6), (4.7) a (4.8) tak dostáváme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Po rozepsání sumy a přeskupení členů získáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots\right),\\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},\\
\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{8},\\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

5. Třetí Eulerovo řešení

V dalším Eulerově řešení basilejského problému, které je uváděno ve zdroji [13], se nám bude hodit následující věta.

Věta 5.1 (Eulerova formule). *Platí*

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1}, \qquad x \in \mathbb{C}.$$

Důkaz. Pro všechna $x \in \mathbb{C}$ platí

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)}{\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1)} = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1}.$$

□

3. řešení. Následující řešení opět využívá funkci sinus a její kořeny $k\pi$, tentokrát ovšem pro každé $k \in \mathbb{Z}$, tedy i $k = 0$. Rozepsáním $\sin x$ na nekonečný součin dostaneme vztah

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\dots,$$

který lze po substituci $x = \pi y$ převést na

$$\sin(\pi y) = \pi y(1-y)(1+y)\left(\frac{2-y}{2}\right)\left(\frac{2+y}{2}\right)\dots = \pi y(1-y^2)\left(\frac{4-y^2}{4}\right)\dots$$

Odtud postupně plyne

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sin(\pi y)\right) &= \ln\pi + \ln y + \ln(1-y^2) + \ln(4-y^2) - \ln 4 + \ldots && \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y},\\
\frac{\pi\cos(\pi y)}{\sin(\pi y)} &= \frac{1}{y} - \frac{2y}{1-y^2} - \frac{2y}{4-y^2} - \ldots && \Big|:(-2y),\\
\frac{1}{2y^2} - \frac{\pi\cos(\pi y)}{2y\sin(\pi y)} &= \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{4-y^2} + \ldots && \Big|y=-\mathrm{i}x,\\
-\frac{1}{2x^2} + \frac{\pi\cos(-\mathrm{i}\pi x)}{2\mathrm{i}x\sin(-\mathrm{i}\pi x)} &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \ldots && (5.1)
\end{aligned}$$

Nyní využijeme Eulerovy formule z věty 5.1, která nám dává

$$\frac{\pi}{2\mathrm{i}x}\cdot\frac{\cos(-\mathrm{i}\pi x)}{\sin(-\mathrm{i}\pi x)} = \frac{\pi}{2\mathrm{i}x}\cdot\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\mathrm{i}\pi x)}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\mathrm{i}\pi x)}-1} = \frac{\pi}{2x}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi x}-1+2}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} = \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi}{x(\mathrm{e}^{2\pi x}-1)}.$$

Po dosazení do levé strany rovnice (5.1) dostaneme

$$\frac{-1}{2x^2} + \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi}{x(\mathrm{e}^{2\pi x}-1)} = \frac{(\pi x-1)(\mathrm{e}^{2\pi x}-1)+2\pi x}{2x^2(\mathrm{e}^{2\pi x}-1)} = \frac{1-\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi x\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi x}{2x^2\mathrm{e}^{2\pi x}-2x^2}.$$

Limitním přechodem $x\to 0$ v rovnici (5.1) dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi x\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi x}{2x^2\mathrm{e}^{2\pi x}-2x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}. \tag{5.2}$$

Limitu vypočítáme opakovaným užitím l'Hospitalova pravidla:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi x\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi x}{2x^2\mathrm{e}^{2\pi x}-2x^2} =\\
\overset{\text{l' Hosp.}}{=}\ &\lim_{x\to 0}\frac{-2\pi\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi(\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x\mathrm{e}^{2\pi x})+\pi}{2(2x\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x^2\mathrm{e}^{2\pi x})-4x} =\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{-2\pi\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi^2x\mathrm{e}^{2\pi x}+\pi}{4x\mathrm{e}^{2\pi x}+4x^2\pi\mathrm{e}^{2\pi x}-4x} =\\
\overset{\text{l' Hosp.}}{=}\ &\lim_{x\to 0}\frac{-2\pi^2\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi^2(\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x\mathrm{e}^{2\pi x})}{4(\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x\mathrm{e}^{2\pi x})+4\pi(2x\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x^2\mathrm{e}^{2\pi x})-4} =\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{4\pi^3x\mathrm{e}^{2\pi x}}{4(\mathrm{e}^{2\pi x}+4\pi x\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi^2x^2\mathrm{e}^{2\pi x}-1)} =\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\pi^3x\mathrm{e}^{2\pi x}}{\mathrm{e}^{2\pi x}+4\pi x\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi^2x^2\mathrm{e}^{2\pi x}-1} =\\
\overset{\text{l' Hosp.}}{=}\ &\lim_{x\to 0}\frac{\pi^3(\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x\mathrm{e}^{2\pi x})}{2\pi\mathrm{e}^{2\pi x}+4\pi(\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x\mathrm{e}^{2\pi x})+2\pi^2(2x\mathrm{e}^{2\pi x}+2\pi x^2\mathrm{e}^{2\pi x})} =\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2(2\pi x+1)}{2+4(2\pi x+1)+2\pi(2x+2\pi x^2)} = \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Z rovnosti (5.2) pak plyne výsledek. □

Euler se po vyřešení basilejského problému dále věnoval řadám $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ pro sudá $p > 2$ a postupně našel součty řad pro všechna taková p až po hodnotu $p = 26$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{26}} = \frac{2^{24}}{27!} \cdot 76\,977\,927\pi^{26} = \frac{1\,315\,862\pi^{26}}{11\,094\,481\,976\,030\,578\,125}.$$

Další podrobnosti uvádí zdroj [3].

6. Řešení pomocí Parsevalovy rovnosti

Následující postup představuje klasické použití Fourierových řad, konkrétně tzv. Parsevalovy rovnosti. Čerpáme zde z [13].

Uvažujme nejprve prostor funkcí

$$L^2[0, 1] = \left\{ f\colon [0, 1] \to \mathbb{C},\ f \text{ lebesgueovsky měřitelná}, \int_0^1 |f|^2 < \infty \right\}, \tag{6.1}$$

na kterém definujeme skalární součin

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f\overline{g}, \tag{6.2}$$

kde $\overline{g}$ značí komplexně sdruženou funkci k funkci g. Ve vzorcích (6.1) a (6.2) uvažujeme Lebesgueův integrál a v prostoru $L^2[0, 1]$ ztotožňujeme funkce, které jsou si na intervalu $[0, 1]$ rovny skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře. Je známo, že množina funkcí

$$S := \left\{ e_n(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

tvoří úplnou ortonormální množinu v $L^2[0, 1]$ a platí pro ni Parsevalova rovnost, tedy pro každou funkci $f \in L^2[0, 1]$ platí

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_k \rangle|^2.$$

Zvolíme-li $f(x) = x$, budou jednotlivé skalární součiny ve tvaru

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_0^1 x\overline{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}, \\ \langle f, e_0 \rangle &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a pro nenulová k pak integrováním per partes dostaneme

$$\begin{aligned} \langle f, e_k \rangle &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k x}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i} k} \left(\left[x\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k x} \right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k x}\,\mathrm{d}x \right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}\left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}kx}}{-2\pi \mathrm{i}k}\right]_0^1\right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}\left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k} + \frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k} - 1}{2\pi \mathrm{i}k}\right) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}.
\end{aligned}
$$

4. řešení. Dosadíme-li do Parsevalovy rovnosti hodnoty příslušných skalárních součinů, dostaneme

$$
\frac{1}{3} = \langle f, f\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{|\langle f, e_0\rangle|^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}\right|^2 = \frac{1}{4} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{4\pi^2 k^2}.
$$

Tedy platí

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{12} &= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

a máme hledané řešení. □

7. Řešení pomocí transformace integrálu

Následující důkaz je novější, publikován byl v [1]. Toto řešení uvádí také zdroj [13].

Věta 7.1. *Platí* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Důkaz. Ze vztahu pro součet geometrické řady plyne

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 y^k \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 y^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{y^k}{k+1}\,\mathrm{d}y = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{y^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

□

Při řešení basilejského problému se nám také bude hodit následující lemma.

Lemma 7.2. *Platí*

$$
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Důkaz. Přímým výpočtem dostaneme

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

□

5. řešení. V integrálu z věty 7.1 zavedeme substituci ve tvaru $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{y-x}{2}$. Potom $x = u - v$, $y = u + v$ a $x \cdot y = u^2 - v^2$. Příslušný jakobián pak bude

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Potom podle věty o substituci ve dvojném integrálu máme

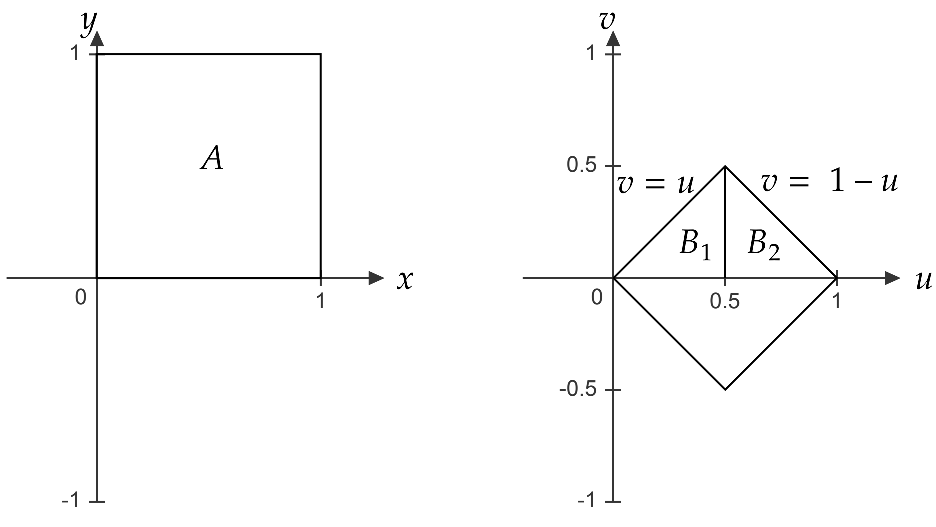
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\underbrace{\iint_B \frac{1}{1-u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}_{I}, \tag{7.1}$$

kde oblasti A a $B := B_1 \cup B_2$ jsou znázorněny na obrázku 1. Tedy máme

$$2I = I_1 + I_2, \text{ kde podle Fubiniovy věty mají jednotlivé integrály tvar}$$

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u, \tag{7.2}$$

$$I_2 = 4\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u. \tag{7.3}$$



Obr. 1. Znázornění transformace

Pro výpočet vnitřních integrálů nám poslouží vztah z lemmatu 7.2. Pro integrál I_1 volíme $x = u$, $a^2 = 1 - u^2$, a pro integrál I_2 volíme $x = 1 - u$, $a^2 = 1 - u^2$. Potom máme

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u \left|\begin{array}{c} u = \sin\varphi \\ \mathrm{d}u = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ 0 \to 0 \\ \frac{1}{2} \to \frac{\pi}{6} \end{array}\right| =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\big[\varphi^2\big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{18},$$

$$I_2 = 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$

$$= 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u \left|\begin{array}{c} u = \cos(2\varphi) \\ \mathrm{d}u = -2\sin(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ \frac{1}{2} \to \frac{\pi}{6} \\ 1 \to 0 \end{array}\right| =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos(2\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(2\varphi)}}\right)}{\sqrt{1-\cos^2(2\varphi)}} (-2)\sin(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos(2\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(2\varphi)}}\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{(1-\cos(2\varphi))^2}{1-\cos^2(2\varphi)}}\right)\mathrm{d}\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\cos(2\varphi)}{1+\cos(2\varphi)}}\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\varphi}{2\cos^2\varphi}}\right)\mathrm{d}\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 4\big[\varphi^2\big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{9}.$$

Na závěr dosadíme za I_1, I_2 vypočítané hodnoty:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

8. Funkce gama a odvozené funkce

V této kapitole se podíváme na některé vlastnosti funkcí gama, digama a trigama využívané v následujících dvou řešeních. Čerpáme z [6], [12]. Funkce gama je definována předpisem

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad x \in (0, \infty).$$

Lze ji také vyjádřit jako limitu

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &:= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(1+x)(2+x)(3+x)\dots(n+x)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Výše uvedený vztah pochází od Leonharda Eulera. Pro funkci gama dále platí

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Eulerova konstanta γ je definována vztahem

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n),$$

kde

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

jsou tzv. harmonická čísla.

Mezi funkcí gama a konstantou γ platí vztah (viz [6])

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Funkci digama $\psi\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definujeme jako logaritmickou derivaci funkce gama, neboli

$$\psi(x) := (\ln \Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Pro funkci digama platí následující vztahy:

$$\psi(1-x) - \psi(x) = \pi \operatorname{cotg}(\pi x), \tag{8.1}$$

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}, \tag{8.2}$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right), \tag{8.3}$$

$$\psi(1) = -\gamma, \tag{8.4}$$

$$\psi(x+1) - \psi(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right). \tag{8.5}$$

Funkce trigama $\psi_1\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako derivace funkce digama, neboli

$$\psi_1(x) := \psi'(x) = (\ln \Gamma(x))'' = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}. \tag{8.6}$$

Pro funkci trigama platí

$$\psi_1(1-x) + \psi_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \in (0, \infty). \tag{8.7}$$

9. Řešení Alexandra Jankova

Alexandr Jankov ve své práci [7] představil zcela nové řešení basilejského problému, kdy součet $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ pomocí funkce digama převedl na výpočet limity:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \pi t \operatorname{cotg}(\pi t)}{2t^2}.$$

6. řešení. Začněme vztahem (8.5) a dosaďme do něj za x hodnoty $\pm\frac{t}{\pi}$, čímž dostaneme

$$\psi\left(\frac{t}{\pi} + 1\right) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{t}{\pi}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{\pi}{k\pi + t}\right),$$

$$\psi\left(-\frac{t}{\pi} + 1\right) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k - \frac{t}{\pi}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{\pi}{k\pi - t}\right).$$

Odečtením první rovnice od druhé získáme

$$\psi\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) - \psi\left(1 + \frac{t}{\pi}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{k\pi + t} - \frac{\pi}{k\pi - t}\right). \tag{9.1}$$

Zároveň podle vztahů (8.1), (8.2) $\left(\text{pro } x = \frac{t}{\pi}\right)$ platí

$$\psi\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{t}{\pi}\right) = \pi \operatorname{cotg}\left(\pi \cdot \frac{t}{\pi}\right) = \pi \operatorname{cotg} t, \tag{9.2}$$

$$\psi\left(1 + \frac{t}{\pi}\right) = \psi\left(\frac{t}{\pi}\right) + \frac{\pi}{t}. \tag{9.3}$$

Odečteme-li od rovnice (9.2) rovnici (9.3), dostaneme

$$\psi\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{t}{\pi}\right) - \psi\left(1 + \frac{t}{\pi}\right) = \pi \operatorname{cotg} t - \psi\left(\frac{t}{\pi}\right) - \frac{\pi}{t}$$

a po úpravě pak

$$\psi\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) - \psi\left(1 + \frac{t}{\pi}\right) = \pi \operatorname{cotg} t - \frac{\pi}{t}.$$

Nyní využijeme vztah (9.1), dosadíme za $\psi\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) - \psi\left(1 + \frac{t}{\pi}\right)$, a upravujeme:

$$\pi \operatorname{cotg} t - \frac{\pi}{t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{k\pi + t} - \frac{\pi}{k\pi - t}\right),$$

$$\frac{1}{t} - \operatorname{cotg} t = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi - t} - \frac{1}{k\pi + t}\right),$$

$$\frac{1}{t} - \operatorname{cotg} t = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2t}{k^2\pi^2 - t^2}\right).$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice t, dostaneme

$$1 - t \operatorname{cotg} t = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2t^2}{k^2\pi^2 - t^2} \right).$$

Dále místo t dosaďme πt. Potom máme

$$\begin{aligned} 1 - \pi t \operatorname{cotg}(\pi t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2 t^2}{k^2\pi^2 - \pi^2 t^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2t^2}{k^2 - t^2} \right), \\ \frac{1 - \pi t \operatorname{cotg}(\pi t)}{2t^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 - t^2} \right). \end{aligned}$$

Provedeme limitní přechod $t \to 0$ a použijeme větu o záměně pořadí limit (viz [2]), neboli

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1 - \pi t \operatorname{cotg}(\pi t)}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 - t^2} \right) &= \lim_{t\to 0} \left(\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - t^2} \right) \right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{t\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - t^2} \right) \right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Nalevo je limita typu $\frac{0}{0}$, lze ji totiž upravit do tvaru

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \pi t \operatorname{cotg}(\pi t)}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(\pi t)}{\sin(\pi t)} - \frac{\pi t \cos(\pi t)}{\sin(\pi t)}}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t) - \pi t \cos(\pi t)}{2t^2 \sin(\pi t)}.$$

Před užitím l'Hospitalova pravidla provedl Jankov drobnou úpravu, která výpočet usnadní. Konkrétně limitu převedl do tvaru

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \pi t \operatorname{cotg}(\pi t)}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t) - \pi t \cos(\pi t)}{2t^2 \sin(\pi t)} = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t) - \pi t \cos(\pi t)}{2t^3},$$

neboť

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Nyní použijme l'Hospitalovo pravidlo a upravujeme:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t) - \pi t \cos(\pi t)}{2t^3} \overset{\text{l' Hosp.}}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{t\to 0} \frac{\pi \cos(\pi t) - \pi(\cos(\pi t) - \pi t \sin(\pi t))}{6t^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{t\to 0} \frac{\pi^2 t \sin(\pi t)}{6t^2} = \frac{\pi}{6} \lim_{t\to 0} \frac{\pi \sin(\pi t)}{\pi t} = \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

čímž jsme dostali řešení basilejského problému. $\square$

10. Fyzikální řešení

Důkaz, který je uveden v článku [12], je inspirován postupem Johana Wästlunda, který basilejský problém přeformuloval pomocí poměru zářivosti hvězdy k převrácenému čtverci její vzdálenosti.

7. řešení. Z kapitoly 4 víme, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

neboli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Výraz vpravo lze fyzikálně interpretovat jako reprezentaci Coulombovy síly působící na jednotkový náboj v bodě $x = \frac{1}{2}$ způsobenou nekonečnou posloupností opačných nábojů v bodech $x_k = k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Odpovídající elektrostatický potenciál je

$$U(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k-x}. \tag{10.1}$$

Protože platí

$$-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-x)^2},$$

můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\left(-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3}F\left(\frac{1}{2}\right), \tag{10.2}$$

kde je $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$. Protože je obecně řada (10.1) divergentní, zavedeme

$$U_R(x) = U(x) - U(0) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k}\right),$$

což nijak neovlivní Coulombovu sílu, a použijeme odpovídající modifikovanou funkci

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U_R(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k}\right).$$

V dalším postupu nám poslouží funkce digama. Použijeme vztahy (8.2) a (8.3), do kterých za x dosadíme $-x$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\psi(-x+1) &= \psi(-x) + \frac{1}{-x},\\ \psi(-x) &= -\frac{1}{-x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-x}\right).\end{aligned}$$

Po dosazení druhé rovnosti do první máme

$$\psi(1-x) = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k}\right).$$

Odtud plyne, že

$$F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\psi(1-x)+\gamma) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(1-x) = \psi_1(1-x),$$

kde ψ_1 je funkce trigama. Podle vztahu (10.2) pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{3}F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\psi_1\left(\frac{1}{2}\right). \tag{10.3}$$

Funkce trigama splňuje vztah

$$\psi_1(1-x) + \psi_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)},$$

pomocí kterého po dosazení $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ze vztahu (10.3) pak máme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{3}\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6},$$

což je řešení basilejského problému. □

11. Řešení pomocí rozdělení pravděpodobnosti

Jeden z novějších důkazů byl publikován v [9], viz též [13]. Předlohou mu byl postup z roku 2003, řešící basilejský problém pomocí dvojného integrálu přes $\mathbb{R}_+^2$ s využitím Fubiniovy věty [5].

Uvažujme nezávislé kladné spojité náhodné veličiny $X_1,\ X_2$. Každá z nich je určena hustotou p_{x_i}, tj. platí

$$\int_a^b p_{x_i}(t)\,\mathrm{d}t = P(a \leqq X_i \leqq b), \quad i \in \{1, 2\},\ 0 < a \leqq b. \tag{11.1}$$

Lemma 11.1. *Nechť $Y = \frac{X_1}{X_2}$ je transformace nezávislých kladných spojitých náhodných veličin X_1, X_2. Pak hustota veličiny Y je*

$$p_Y(u) = \int_0^{\infty} t p_{X_1}(tu) p_{X_2}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{11.2}$$

Důkaz. Vyjděme z identity (11.1) a s využitím Fubiniovy věty počítejme

$$\int_a^b p_Y(u)\,\mathrm{d}u = P\Big(a \leqq Y \leqq b\Big) = P\Big(a \leqq \frac{X_1}{X_2} \leqq b\Big) = P\Big(aX_2 \leqq X_1 \leqq bX_2\Big) =$$

$$= \int_0^\infty \int_{at_2}^{bt_2} p_{X_1}(t_1) p_{X_2}(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \left| \begin{array}{l} t_1 = t_2 u \\ \mathrm{d}t_1 = t_2\,\mathrm{d}u \\ at_2 \to a \\ bt_2 \to b \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^\infty \int_a^b t_2 p_{X_1}(t_2 u) p_{X_2}(t_2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t_2 =$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^\infty t_2 p_{X_1}(t_2 u) p_{X_2}(t_2)\,\mathrm{d}t_2 \right) \mathrm{d}u.$$

Vnitřní integrál odpovídá dokazovanému vzorci pro hustotu náhodné veličiny Y. $\square$

Nyní máme všechny potřebné nástroje pro vyřešení basilejského problému.

8. řešení. Pro X_1, X_2 uvažujme Cauchyovo rozdělení s hustotou

$$p_{X_j}(t) = \frac{2}{\pi(1+t^2)}, \quad j \in \{1, 2\},\ t \in \mathbb{R}.$$

Podle vzorce (11.2) z lemmatu 11.1 můžeme psát

$$p_Y(u) = \int_0^\infty t \cdot \frac{2}{\pi(1+t^2u^2)} \cdot \frac{2}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{2t}{(1+t^2u^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi^2(u^2-1)} \int_0^\infty \frac{2t(u^2-1)}{(1+t^2u^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi^2(u^2-1)} \int_0^\infty \frac{\frac{2t(u^2-1)}{(1+t^2)^2}}{\frac{1+t^2u^2}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi^2(u^2-1)} \left[\ln\left(\frac{1+t^2u^2}{1+t^2} \right) \right]_0^\infty = \frac{2}{\pi^2(u^2-1)} \lim_{t\to\infty} \left(\ln \frac{1+t^2u^2}{1+t^2} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2(u^2-1)} \ln\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1+t^2u^2}{1+t^2} \right) = \frac{2}{\pi^2(u^2-1)} \cdot \ln u^2.$$

Protože náhodná veličina Y vznikla jako podíl dvou kladných náhodných veličin, je určitě také kladná. Ze symetrie X_1 a X_2 pak plyne, že pravděpodobnost, že její hodnota je mezi 0 a 1, je přesně $\frac{1}{2}$. Pravděpodobnost pak rovněž můžeme vyjádřit jako integrál z hustoty, tedy

$$\frac{1}{2} = P(0 \leqq Y \leqq 1) = \int_0^1 p_Y(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u,$$

odkud dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{8}.$$

Zároveň lze integrál přepsat do tvaru

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 -\frac{\ln u}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} u^{2k}\ln u\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 u^{2k}\ln u\,\mathrm{d}u.$$

Integrál spočítáme metodou per partes:

$$\int_0^1 u^{2k}\ln u\,\mathrm{d}u = \underbrace{\left[\frac{u^{2k+1}}{2k+1}\ln u\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{u^{2k+1}}{2k+1}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= -\int_0^1 \frac{u^{2k}}{2k+1}\,\mathrm{d}u = -\left[\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Odtud máme

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 u^{2k}\ln u\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 u^{2k}\ln u\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Jak bylo ukázáno např. v kapitole 4, z rovnosti

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

ihned plyne rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

12. Řešení pomocí komplexní exponenciály

Následující důkaz využívá vztahů mezi exponenciálou a goniometrickými funkcemi. Řešení je uvedeno ve zdroji [10]. Využijeme v něm rozvoj funkce $\ln(1+x)$ do mocninné řady a následující větu.

Věta 12.1. *Platí*

$$\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) = \ln(2\cos x) - \mathrm{i}x. \tag{12.1}$$

Důkaz. Podle pravidel pro počítání s logaritmy platí

$$\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right) = \ln \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = -\mathrm{i}x + \ln(2\cos x),$$

což jsme chtěli dokázat. □

9. řešení. Do rozvoje funkce $\ln(1+x)$ můžeme za x dosadit výraz $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$ a vypočítat integrál. Pro korektnost postupu musíme pracovat pouze na polouzavřeném intervalu $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, na kterém příslušná řada konverguje stejnoměrně, a tedy je možná záměna sumace a integrace. Počítáme tedy vlastně limitu zleva v bodě $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}x}}{k}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}x}}{k}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}x}}{-2k^2\mathrm{i}}\right]_0^t = \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}t}}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \frac{(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}t}}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}\pi}}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\left(-1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\ldots\right) - \right. \\
&\qquad \left. -\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots\right)\right) = \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(-2-\frac{2}{9}-\frac{2}{25}-\ldots\right) = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right).
\end{aligned}$$

S využitím identity (12.1) dále máme

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\cos x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)+\mathrm{i}x\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{i}x\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right) + \mathrm{i}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \mathrm{i}\cdot\left(\frac{\pi^2}{8} - \left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right)\right).
\end{aligned} \tag{12.2}$$

Integrál je ovšem reálný, tudíž jeho imaginární složka musí být nulová. Odtud plyne

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots = \frac{\pi^2}{8},$$

odkud dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

13. Závěr

Pro sudá $p \in \mathbb{N}$ existuje vzorec udávající součet nekonečné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ pomocí Bernoulliho čísel definovaných rekurentním vztahem

$$B_n = 1 - \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \frac{B_m}{n-m+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13.1}$$

s počáteční hodnotou $B_0 = 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí (viz [13])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} B_{2n}. \tag{13.2}$$

Pro sudé exponenty tedy máme obecný vzorec, zatímco o součtech pro liché exponenty p víme jen velmi málo. Zdroj [14] uvádí důkaz iracionality součtu pro $p = 3$, což je hodnota tzv. funkce zeta v bodě 3. O zkoumání dodnes nevyřešeného problému nalezení explicitní hodnoty pro $\zeta(3)$ pojednává kniha [8].

Hlavním podkladem pro tento článek byla autorova bakalářská práce [4].

Literatura

[1] Apostol, T. M.: *A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way.* Math. Intelligencer 5 (1983), 59–60.

[2] Došlá, Z., Novák, V.: *Nekonečné řady.* 3. vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2013.

[3] Dunham, W.: *Euler: The Master of us all.* The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[4] Haluza, J.: *Sčítání nekonečných řad a Basilejský problém.* Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2022.
Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/bazus/`

[5] Harper, J. D.: *Another simple proof of* $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$. Amer. Math. Monthly 110 (2003), 540–541.

[6] Havil, J.: *Gamma: Exploring Euler's constant.* Princeton University Press, Princeton, 2003.

[7] Jankov, A.: *Basilejský problém.* SOČ, Ostrava, 2016.
Dostupné z: `http://soc.nidv.cz/archiv/rocnik38/obor/1`

[8] Nahin, P. J.: *In pursuit of zeta-3: The world's most mysterious unsolved math problem.* Princeton University Press, Princeton, 2021.

[9] Pace, L.: *Probabilistically proving that* $\zeta(2) = \pi^2/6$. Amer. Math. Monthly 118 (2011), 641–643.

[10] Perkins, D.: *φ, π, e & i.* The Mathematical Association of America, 2018.

[11] Řimnáčová, B.: *Mocninné řady.* Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2020. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/kym38/

[12] Silagadze, Z. K.: *The Basel problem: A physicist's solution.* Math. Intelligencer 41 (2019), 14–18.

[13] Sullivan, B. W.: *The Basel problem: numerous proofs* [online]. Dostupné z: https://www.math.cmu.edu/ bwsulliv/basel-problem.pdf

[14] Van Der Poorten, A., Apéry, R.: *A proof that Euler missed: Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. Math. Intelligencer 1 (1979), 195–203.

[15] Veselý, J.: *Komplexní analýza pro učitele.* Karolinum, Praha, 2000.