Rozhledy matematicko-fyzikální

Počet jedniček v číslech od 1 do 1000

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 3, 32–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151281

Počet jedniček v číslech od 1 do 1000

Milá redakce,

není to dlouho, co jsme se učili i celé týdny on-line. Učit matematiku, zejména názorně a jednoduše vysvětlovat slovní úlohy, bylo náročné pro učitele i žáky. Na druhou stranu vzniklo mnoho inspirativních situací, metod i jednotlivých úloh, které vyšly na světlo právě díky nezvyklým podmínkám.

čas od času se rád odkloním od standardního učiva a předložím žákům i sobě nějakou matematickou výzvu. Z jednoduchých námětů tak často vzniknou i docela složité, přitom velmi zábavné úlohy. žákům 5. ročníku jsem předložil tuto úlohu: *Spočítejte, kolik jedniček (cifer) je v číslech od 1 do 100.* Řešení úlohy jsem nechal zcela na žácích a k mému překvapení na ní pracovali velmi samostatně a v týmovém duchu. Došli jsme k nějakému výsledku (ten si může zvídavý čtenář sám objevit) a pak jsem zadal dětem dobrovolný domácí úkol, aby si spočítaly, kolik jedniček je v číslech od 1 do 1000. Velmi mě udivila pozitivní reakce jednoho tatínka, který s dcerou celý večer úlohu počítal a poslal mi e-mailem správné řešení, na které spolu přišli. S velkou radostí jsem žákyni dal velkou jedničku.

Zajímalo by mě, jestli existuje nějaký obecný postup, jak spočítat počet výskytů vybrané číslice v daném souboru čísel, např. zjistit, kolik jedniček je v číslech od 1 do milionu.

S pozdravem D.V. učitel z Prahy

Jak často se jednička vyskytne v dekadickém zápisu čísel?

Děkujeme panu učiteli D.V. za přínosnou otázku ohledně zápisu přirozených čísel. Ihned v začátku upřesněme, že se jedná o desítkový (dekadický) zápis čísel

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 47,\ \ldots,\ 122,\ \ldots,\ 277,\ \ldots,\ 314\,159,\ \ldots,\ 153\,575\,832,\ \ldots$$

Ukážeme různé způsoby řešení, jak počet výskytů cifry jedna v dané množině přirozených čísel určit: od jednoduchého sledování a přičítání výskytu jednotlivých jedniček v daném seznamu uvažovaných čísel až po elegantní způsob, jak otázku okamžitě, bezprostředně zodpovědět. Právě tento okamžik poskytuje příležitost poukázat na jednu ze základních charakteristik matematiky, totiž na abstrakci! Jednotlivé kroky v postupu řešení jsou číslovány. Věříme, že ve výuce elementární matematiky může být takový přístup velice poučný a záslužný.

1. V řešení úlohy jednoduchým sečítáním jedniček z daného seznamu čísel jsme samozřejmě ihned omezeni velikostí skupiny čísel. Zkontrolovat všechna čísla od 1 do 10 nebo od 1 do 100 je snadné, od 1 do 1 000 už namáhavější a patrně od 1 do 10 000 ještě možné. Připustíme-li, že každou vteřinu bychom zkontrolovali čtyři čísla, trvalo by naše určení počtu jedniček v číslech od 1 do 10 000 téměř 42 minut, v číslech od 1 do 100 000 téměř 7 hodin a v číslech od jedné do milionu téměř 70 hodin! Ohromuje vás to? A co teprve, když si uvědomíte, že k určení počtu jedniček v číslech od jedné do bilionu (tj. do 10^{12}) tímto způsobem bychom potřebovali téměř osm tisíciletí!

Jednoduchým výpočtem tedy snadno zjistíme, že v zápisu čísel od 1 do 10 jsou jedničky 2, od 1 do 100 jich je 21 a od 1 do 1 000 jich je 301. Přitom si všimneme, že je vhodné uvažovat skupiny

– jednociferných čísel, tj. čísel od 0 do 9,
– jednociferných a dvojciferných čísel od 0 do 99 a
– jednociferných, dvojciferných a trojciferných čísel od 0 do 999;

v těchto skupinách je postupně 10 čísel, 100 čísel a 1 000 čísel. Počty jedniček v zápise čísel v těchto skupinách jsou 1, 20 a 300.

2. Předchozího poznání nyní využijeme k tomu, abychom v tomto odstavci popsali metodu, kterou lze použít pro jakkoli velké skupiny čísel. Předvedeme ji pro počet jedniček v 10 000 číslech od 0 do 9 999. Pro snadné vyjadřování, a především pro nakládání se všemi číslicemi včetně nuly stejně, rovnoměrně, budeme čísla v našem souboru zapisovat ve tvaru čtveřic (tj. každé jednociferné, dvojciferné či trojciferné číslo doplníme na čtveřici přidáním nul na začátek zápisu):

$$0 \sim 0000,\ 1 \sim 0001,\ 2 \sim 0002,\ \ldots,\ 9 \sim 0009,\ 10 \sim 0010,$$
$$11 \sim 0011,\ 12 \sim 0012,\ \ldots,\ 47 \sim 0047,\ \ldots,\ 277 \sim 0277,\ \ldots,$$
$$3\,145 \sim 3145,\ \ldots,\ 9\,999 \sim 9999.$$

Nyní začneme počítat: čísla mající ve svém dekadickém zápisu právě jednu jedničku jsou tvaru

xxx1, xx1x, x1xx a 1xxx, kde x je jakákoliv číslice různá od 1.

Proto je takových čísel $4 \cdot 9^3$.

Čísla mající ve svém dekadickém zápisu právě dvě jedničky jsou tvaru xx11, x1x1, 1xx1, x11x, 1x1x a 11xx, kde x je kterákoliv číslice různá od 1. Takových čísel je $6 \cdot 9^2$ a obsahují $6 \cdot 9^2 \cdot 2$ jedniček.

Čísla mající ve svém dekadickém zápisu právě tři jedničky jsou tvaru x111, 1x11, 11x1 a 111x, kde x je kterákoliv číslice různá od 1. Takových čísel je tedy $4 \cdot 9$ a obsahují $4 \cdot 9 \cdot 3$ jedniček.

Číslo 1111 má ve svém dekadickém zápisu 4 jedničky. Počet jedniček v číslech od 0 do 9 999 je tedy

$$4 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 \cdot 2 + 4 \cdot 9 \cdot 3 + 4 = 2\,916 + 972 + 108 + 4 = 4\,000.$$

3. Proveďme nyní tento výpočet pro počet jedniček v dekadickém zápisu čísel od 1 do 10^n pro libovolné přirozené číslo n. S výjimkou posledního čísla $10^n = 1000\ldots0$ (n nul) a přidáním nuly, uvažujme 10^n čísel od 0 do $10^n - 1$ ve tvaru n-tic xxx…x, v nichž x reprezentuje libovolnou číslici od 0 do 9.

V následujících výpočtech využijeme binomické koeficienty

$$a_{n,k} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \quad \text{pro} \;\; k \in \{1, \ldots, n\},$$

které můžeme výhodně zobrazit ve tvaru Pascalova trojúhelníku

$$\begin{array}{c}
a_{1,1}{=}1 \\
a_{2,1}{=}1 \quad 1 \\
a_{3,1}{=}1 \quad a_{3,2}{=}2 \quad 1 \\
a_{4,1}{=}1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
a_{5,1}{=}1 \quad 4 \quad a_{5,3}{=}6 \quad 4 \quad 1 \\
a_{6,1}{=}1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
a_{7,1}{=}1 \quad 6 \quad 15 \quad a_{7,4}{=}20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
a_{8,1}{=}1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
a_{9,1}{=}1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad a_{9,5}{=}70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
a_{10,1}{=}1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Zde n označuje pořadí řádků a členy trojúhelníku splňují Al-Karajiho rovnosti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \;\text{ a }\; \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \;\text{pro}\; n \geq k \;\geq 1.$$

Připomeňme, že $\binom{n}{k}$ je číslo udávající počet podmnožin s k prvky množiny o n prvcích. Pro každé n definujeme $\binom{n}{0} = 1$. Dále budeme potřebovat binomickou větu: Pro libovolná reálná čísla a, b a n přirozené platí

$$\sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} a^t b^{n-t} = (a+b)^n.$$

Nyní už počítejme: Uvažujme n-tice xxx...xx, v nichž je právě jedno x = 1, tj. n-tice tvaru 1xx...xx, x1x...xx, ..., xxx...x1. Počet jedniček v zápisu všech čísel v každém takovém případě je 9^{n-1}. Celkový počet jedniček v číslech, které mají ve svém zápisu právě jednu jedničku, je tedy

$$\binom{n}{1} \cdot 9^{n-1} = n \cdot \binom{n-1}{0} \cdot 9^{n-1}.$$

Podobně je $\binom{n}{2} \cdot 9^{n-2}$ n-tic, které mají ve svém zápisu právě dvě jedničky. Přispívají tedy do konečného počtu jedniček

$$\binom{n}{2} \cdot 2 \cdot 9^{n-2} = n \cdot \binom{n-1}{1} \cdot 9^{n-2}$$

jedničkami.

Stejným způsobem se přesvědčíme, že pro $k \leq n$ je $\binom{n}{k} \cdot 9^{n-k}$ n-tic, které mají ve svém zápisu právě k jedniček. Přispívají tedy k celkovému počtu jedniček

$$\binom{n}{k} \cdot k \cdot 9^{n-k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot 9^{n-k}$$

jedničkami. Celkový počet jedniček v dekadickém zápisu čísel od 0 do $10^n - 1 = 999\ldots99$ je tedy (použitím binomické věty)

$$\sum_{t=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{t} \cdot 9^{(n-1)-t} = n \cdot (9+1)^{n-1} = n \cdot 10^{n-1}.$$

Odtud dostáváme postupně počty jedniček 1, 20, 300, 4 000, 50 000, 600 000, ... v zápisu čísel od 0 do $9 = 10 - 1$, do $99 = 100 - 1$, do $999 = 1\,000 - 1$, do $9\,999 = 10\,000 - 1$, do $99\,999 = 100\,000 - 1$, do $999\,999 = 1\,000\,000 - 1$, ...

4. Nyní si stačí pouze uvědomit, že naprosto stejným způsobem, jakým jsme odvodili počet jedniček od 0 do $10^n - 1$, lze odvodit počet dvojek, trojek, …, devítek i nul. Vezmeme-li v úvahu všech deset číslic, dostáváme $10 \cdot n \cdot 10^{n-1} = n \cdot 10^n$, což je počet všech číslic (cifer) v zápisu všech čísel od 0 do $10^n - 1$ ve tvaru n-tic.

Tento závěr nás přivedl k velmi stručnému a výstižnému řešení otázky pana učitele, které zde nyní formálně předvedeme (*bez jakékoliv reference na předchozí úvahy*).

Tvrzení 1. *Počet jedniček v dekadickém zápisu čísel od* 1 *do* 10^n *je*

$$n \cdot 10^{n-1} + 1.$$

Důkaz. Dekadický zápis každého čísla $k, 0 \leq k \leq 10^n - 1$, vyjádřeme ve formě n-tice doplněním potřebného počtu nul na předních místech. Např. číslo 277 bude ve formě sedmice ($n = 7$) vyjádřeno takto: 0000277. Ve formě dvanáctice ($n = 12$) to bude 000000000277. Označme M množinu těchto 10^n n-tic. K vyjádření všech těchto n-tic potřebujeme tedy $N = n \cdot 10^n$ číslic. Jelikož se v této reprezentaci uvedených čísel vyskytne stejný počet každé z 10 číslic, tj. stejný počet nul, jedniček, dvojek, …, devítek, každá z číslic se vyskytne $\frac{N}{10}$-krát. Odtud plyne, že počet každé z číslic x, $0 \leq x \leq 9$, potřebných k vyjádření všech 10^n n-tic je $n \cdot 10^{n-1}$. Stačí pouze dodat, že přidáním čísla 10^n zvětšíme počet jedniček v zápisu čísel od 1 do 10^n o jednu na $n \cdot 10^{n-1} + 1$.

5. Již jsme zmínili, že počet dvojek, či trojek, …, či devítek je v dekadickém zápisu čísel od 1 do 10^n vždy $n \cdot 10^{n-1}$. Otázkou tedy zbývá pouze počet nul potřebných k záznamu všech čísel od 1 do 10^n. Odpověď je dána v následujícím tvrzení.

Tvrzení 2. *Počet nul v dekadickém zápisu čísel od* 1 *do* 10^n *je*

$$\frac{10^{n-1} \cdot (9n - 10) + 9n + 1}{9}.$$

Důkaz tohoto tvrzení ponecháváme čtenáři. Stačí například spočítat, kolik nul užitých v zápisu všech čísel od 0 do $10^n - 1$ ve formě n-tic není v dekadickém zápisu čísel od 1 do 10^n zapotřebí.

K dekadickému zápisu všech čísel od jedné do milionu je tedy zapotřebí 488 895 nul, 600 001 jedniček a 600 000 každé z ostatních číslic. Pro zápis všech čísel od jedné do bilionu je zapotřebí 1 088 888 888 901 nul, 1 200 000 000 001 jedniček a 1 200 000 000 000 každé z ostatních číslic.