Pavel Pokorný

Energie nabité desky – aplikace čtyřnásobného integrálu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 1, 40–51

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151066`

[2] Fotakis, C., Barberoglou, M., Zorba, V. et al.: *Applications of ultrafast lasers in materials processing: fabrication on self-cleaning surfaces and scaffolds for tissue engineering.* In: 15th International School on Quantum Electronics: Laser Physics and Applications. International Society for Optics and Photonics, Vol. 7027 (2008), article id. 702702, s. 1–6.

[3] Hauschwitz, P., Jagdheesh, R., Rostohar, D., Brajer, J. et al.: Nanostructure fabrication on the top of laser-made micropillars for enhancement of water repellence of aluminium alloy. *Materials Letters*, 256 (2019), https://doi.org/10.1016/j.matlet.2019.126601.

[4] Hauschwitz, P., Jagdheesh, R., Alamri, S., Rostohar, D. et al.: Fabrication of functional superhydrophobic surfaces on carbon fibre reinforced plastics by IR and UV direct laser interference patterning. *Applied Surface Science*, 508 (2020), doi: 10.1016/j.apsusc.2019.144817.

Energie nabité desky – aplikace čtyřnásobného integrálu

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

1. Význam určitého integrálu

Určitý integrál je matematický nástroj vhodný k řešení úloh, které nelze spočítat „jednoduše najednou“. Díky integrálu dostaneme řešení jako součet velmi mnoha velmi malých příspěvků, z nichž každý se dá jednoduše spočítat (jak uvidíme dále např. jako obsah obdélníka). Pro konečný počet příspěvků dostaneme pouze přibližný výsledek, ale integrál jako limita pro nekonečně mnoho nekonečně malých příspěvků dá přesný výsledek. Např. obsah plochy mezi grafem kladné spojité funkce $f(x)$ a osou x nad úsečkou od a do b se spočítá pro konstantní funkci, jejímž grafem je úsečka rovnoběžná s osou x, jako obsah obdélníku $S = f \cdot (b - a)$. Pro nekonstantní funkci si můžeme plochu pod grafem představit rozdělenou na velký počet tenkých svislých nudliček o výšce $f(x)$ a šířce $\mathrm{d}x$. Pak obsah jedné nudličky je

$$\mathrm{d}S = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a celkový obsah je

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně, práce W konstantní síly F po dráze x, kde síla má směr posunutí, je $W = F\,x$. Pro nekonstantní sílu $F(x)$, která závisí na poloze x, uvažujeme nekonečně malé posunutí $\mathrm{d}x$. Pak příspěvek k práci po tomto malém úseku dráhy je $\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$ a celková práce je

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro kladnou spojitou funkci dvou proměnných $z = f(x,y)$ je grafem plocha v prostoru xyz. Můžeme uvažovat objem V tělesa mezi grafem této funkce a rovinou xy nad obdélníkem $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Pro konstantní funkci je tímto tělesem kvádr o rozměrech f, $b-a$ a $d-c$, má tedy objem $V = f\cdot(b-a)\cdot(d-c)$. Pro nekonstantní funkci $f(x,y)$ si můžeme představit toto těleso rozdělené na velký počet tenkých sloupků o výšce $f(x,y)$ s podstavou ve tvaru obdélníku o rozměrech $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$. Pak $f(x,y)\,\mathrm{d}x$ je obsah boční stěny jednoho tenkého sloupku. Představíme-li si pro určitost uvažované těleso jako bochník chleba (s obdélníkovým půdorysem), je $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ obsah jedné strany krajíce chleba. Pak $\mathrm{d}y$ si můžeme představit jako tloušťku tohoto krajíce a $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ je objem jednoho krajíce. Dále

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

je objem celého bochníku, tedy objem celého tělesa.

Podobně trojný integrál funkce tří proměnných bychom si mohli představit jako objem tělesa ve čtyřrozměrném prostoru. Pro lepší představu trojného integrálu si můžeme představit integrovanou funkci jako hustotu $\varrho(x,y,z)$ a uvažovat hmotnost m tělesa o této hustotě a objemu V. Pro konstantní hustotu je hmotnost $m = \varrho\cdot V$. Pro nekonstantní hustotu si těleso rozdělíme na velký počet malinkých kvádříků o rozměrech $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$. Pak objem jednoho malého kvádříku je $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ a hmotnost takového kvádříku je $\mathrm{d}m = \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ a hmotnost celého tělesa je

$$m = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Mohlo by se zdát, že trojným integrálem funkce tří proměnných fyzikální aplikace končí. My si ale v tomto článku ukážeme aplikaci čtyřnásobného integrálu pro výpočet energie elektricky nabité čtvercové desky.

2. Výpočet energie elektricky nabité čtvercové desky

Uvažujme desku tvaru čtverce o straně L, která je elektricky nabita celkovým nábojem Q tak, že má konstantní plošnou hustotu elektrického náboje

$$\sigma = \frac{Q}{L^2}.$$

(Deska je z nevodivého materiálu.)

Určeme nejprve energii soustavy dvou bodových nábojů o velikosti q_1 a q_2. Podle Coulombova zákona se tyto dva náboje odpuzují silou

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

zde

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon},$$

kde ε je permitivita prostředí a r je vzdálenost nábojů. Integrací této síly dostaneme práci, kterou musíme vykonat, abychom přemístili druhý náboj z nekonečna do vzdálenosti r od prvního náboje. To bude odpovídat energii soustavy dvou bodových nábojů

$$E = -\int_\infty^r F\,\mathrm{d}x = -\int_\infty^r k\frac{q_1 q_2}{x^2}\,\mathrm{d}x = kq_1q_2\left[\frac{1}{x}\right]_\infty^r = k\frac{q_1 q_2}{r}.$$

Znaménko minus souvisí s tím, že síla má opačný směr než posunutí náboje.

Nabitou desku si můžeme představit jako soustavu složenou z velkého počtu malých nabitých „kousků“. Energie nabité desky bude součtem energií všech dvojic těchto malých nabitých kousků. Označme polohu jednoho kousku (X, Y), jeho obsah $dX\,dY$, jeho náboj $\sigma\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y$ a polohu druhého kousku (U, V), jeho obsah $\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V$ a náboj $\sigma\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V$. Později přejdeme k bezrozměrným veličinám x, y, u, v. Vzdálenost těchto dvou kousků je

$$r = \sqrt{(X-U)^2 + (Y-V)^2}.$$

Energie desky bude

$$E = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^L k\,\frac{\sigma\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\sigma\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V}{r}.$$

Přejdeme od souřadnic X, Y, U, V v délkových jednotkách, např. v metrech, k bezrozměrným souřadnicím x, y, u, v vztahy $X = Lx$, $Y = Ly$, $U = Lu$ a $V = Lv$ a dostaneme

$$E = k\frac{Q^2}{L}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Abychom spočítali tento čtyřnásobný integrál

$$I_4 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

provedeme nejprve několik pomocných výpočtů.

3. Pomocné výpočty

Exponenciální funkci budeme z důvodu úspory místa psát na řádku, tedy $\mathrm{e}^x = \exp x$. Použijeme komplexní exponenciálu

$$\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi,$$

kde i je imaginární jednotka (tedy $\mathrm{i}^2 = -1$). Tento vztah lze dokázat použitím Taylorovy řady pro exponenciálu a pro funkce sinus a kosinus

$$\begin{aligned}\exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,\\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,\\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots\end{aligned}$$

Sečtením a odečtením vztahů

$$\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

a

$$\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$$

dostaneme další vztahy pro funkce sinus a kosinus:

$$\cos x = \frac{\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)}{2}, \qquad \sin x = \frac{\exp(\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)}{2i}.$$

Podobnými vztahy jsou definovány funkce hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \qquad \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

Z definice těchto funkcí přímo plynou vztahy

$$\begin{aligned} \sinh(\mathrm{i}x) &= \mathrm{i}\sin x, \qquad & \sin(\mathrm{i}x) &= \mathrm{i}\sinh x,\\ \cosh(\mathrm{i}x) &= \cos x, \qquad & \cos(\mathrm{i}x) &= \cosh x. \end{aligned}$$

Proč mají slovo hyperbolický ve svém názvu, je vidět z následující úvahy. Pro funkce sinus a kosinus platí

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

a parametricky zadaná křivka

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

je kružnice

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Podobně pro hyperbolický kosinus a hyperbolický sinus platí

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= \frac{(\exp(t) + \exp(-t))^2}{4} - \frac{(\exp(t) - \exp(-t))^2}{4} = \\ &= \frac{\exp(2t) + 2 + \exp(-2t) - \exp(2t) + 2 - \exp(-2t)}{4} = 1. \end{aligned}$$

Proto parametricky zadaná křivka

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t$$

je hyperbola

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Podobně jako pro derivace funkcí sinus a kosinus platí

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

lze téměř zpaměti odvodit

$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x,$$

tedy bez znaménka minus.

Funkce sinh je rostoucí, a tedy prostá na R, proto k ní existuje inverzní funkce arcsinh. Lze pro ni najít vyjádření tak, že řešíme rovnici

$$y = \sinh x$$

pro neznámou x. Použijeme substituci $w = \exp(x) > 0$ a dostaneme

$$\begin{aligned} y &= \frac{w - \frac{1}{w}}{2}, \\ 2yw &= w^2 - 1, \\ w^2 - 2yw - 1 &= 0. \end{aligned}$$

To je kvadratická rovnice, která má dva kořeny. Nás zajímá ten kladný

$$w = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

odkud dostáváme předpis pro inverzní funkci k hyperbolickému sinu, tj.

$$\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

kde log je přirozený logaritmus.

Podobně pro hyperbolický kosinus (pokud se omezíme na nezáporné argumenty, aby byla funkce prostá) lze odvodit vztah pro inverzní funkci

$$\operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Tyto funkce mají užitečné derivace

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = (\log(x + \sqrt{x^2 + 1}))' =$$
$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Proto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Aditivní konstantu u primitivní funkce zde i dále vynecháváme, protože naším cílem bude určitý integrál.

A pro $b > 0$ je

$$\left(\operatorname{arcsinh} \frac{x}{b}\right)' = \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{b})^2 + 1}} \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Proto
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{b}.$$
Podobně lze odvodit
$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$
Odvodíme si ještě několik dalších integrálů, které budeme potřebovat. Podobně, jako lze využít substituci $x = \sin t$ pro výpočet integrálu
$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) = \frac{1}{2}\Big(t + \sin t\cos t\Big) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right),$$
můžeme použít substituci $x = \sinh t$ pro výpočet integrálu
$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Tak, jako jsme použili vztah
$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2},$$
odvodíme si podobný vztah pro hyperbolický kosinus
$$\cosh^2 t = \frac{(\exp(t)+\exp(-t))^2}{4} = \frac{\exp(2t)+\exp(-2t)+2}{4} = \frac{1+\cosh 2t}{2}.$$
A tak, jako jsme při závěrečných úpravách použili vztah $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, odvodíme obdobný vztah pro hyperbolické funkce
$$2\sinh t\cosh t = 2\,\frac{\exp(t)-\exp(-t)}{2}\,\frac{\exp(t)+\exp(-t)}{2} =$$
$$= \frac{\exp(2t)-\exp(-2t)}{2} = \sinh 2t.$$
Spočtěme tedy integrál
$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = \sinh t \\ \mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sinh 2t}{2}\right) = \frac{1}{2}\Big(t + \sinh t\cosh t\Big) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsinh} x + x\sqrt{1+x^2}\right).$$

Dále s využitím vztahu

$$\left(\operatorname{arcsinh}\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

vypočteme metodou per partes integrál

$$\int \operatorname{arcsinh}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u' = 1 & v = \operatorname{arcsinh}\frac{1}{x} \\ u = x & v' = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \end{matrix}\right| =$$

$$= x\operatorname{arcsinh}\frac{1}{x} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arcsinh}\frac{1}{x} + \operatorname{arcsinh} x.$$

Budeme ještě potřebovat následující limitu typu „nula krát nekonečno“

$$\lim_{x\to 0+} x\operatorname{arcsinh}\frac{1}{x}.$$

Protože

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{arcsinh} y}{y} = \lim_{y\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}{1} = 0,$$

je s použitím substituce $x = \frac{1}{y}$ také

$$\lim_{x\to 0+} x\operatorname{arcsinh}\frac{1}{x} = 0.$$

Tato funkce je sudá, tudíž můžeme přejít od jednostranné limity k oboustranné

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{arcsinh}\frac{1}{x} = 0.$$

A také

$$\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{x} = 0.$$

4. Dvojný integrál

Při výpočtu čtyřnásobného integrálu

$$I_4 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

na jednotkové čtyřrozměrné hyperkrychli si nejdříve spočteme vnitřní dvojný integrál

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}u$$

na jednotkovém čtverci.

Označíme konstantu $b = |y - v|$ a v integrálu

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + b^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}u$$

použijeme substituci

$$x = \frac{s-t}{\sqrt{2}}, \quad u = \frac{s+t}{\sqrt{2}}, \qquad \text{neboli} \qquad s = \frac{x+u}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{u-x}{\sqrt{2}},$$

tedy

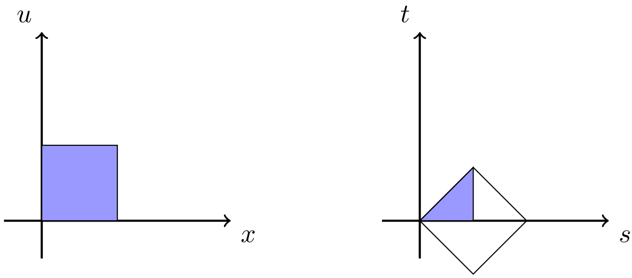
$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{kde } A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A představuje otočení o 45° (protože zobrazuje jednotkový vektor $\binom{1}{0}$ mířící na východ na jednotkový vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ mířící na severovýchod a jednotkový vektor $\binom{0}{1}$ mířící na sever na jednotkový vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$ mířící na severozápad) a její determinant je $\det A = 1$. V nových souřadnicích s a t je integrovaná funkce nezávislá na s a sudá v t, můžeme proto integrovat na jedné čtvrtině otočeného čtverce (viz obr. 1, kde je vyznačena množina, na které integrujeme v rovině xu a v rovině st) a integrál vynásobíme čtyřmi.

Tím dostáváme

$$I_2 = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_t^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2t^2 + b^2}}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - t}{\sqrt{t^2 + \frac{b^2}{2}}}\, \mathrm{d}t =$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{t\sqrt{2}}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 + \frac{b^2}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{b} + 2b - 2\sqrt{1 + b^2}.$$



Obr. 1: Přechod od souřadnic x, u k souřadnicím s, t

5. Čtyřnásobný integrál

Původní čtyřnásobný integrál je

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \left(2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{|y-v|} + 2|y-v| - 2\sqrt{1+(y-v)^2}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}v.$$

Použijeme opět stejnou substituci jako při výpočtu integrálu I_2, tedy otočení o 45° maticí A. A i zde je potom integrovaná funkce sudá v t a nezávislá na s, takže můžeme opět integrovat pouze na jedné čtvrtině čtverce. Situaci ilustruje stejný obrázek jako při výpočtu I_2. Dostaneme

$$I_4 = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_t^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{t\sqrt{2}} + 2t\sqrt{2} - 2\sqrt{1+2t^2}\right) \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t =$$

$$= 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - t\right)\left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{t\sqrt{2}} + t\sqrt{2} - \sqrt{1+2t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

A použitím drobné substituce $g = t\sqrt{2}$ dostaneme

$$I_4 = 4 \int_0^1 (1-g)\left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} + g - \sqrt{1+g^2}\right) \mathrm{d}g =$$

$$= 4\Bigg[g \operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} + \operatorname{arcsinh} g + \frac{g^2}{2} - \frac{1}{2}\left(g\sqrt{1+g^2} + \operatorname{arcsinh} g\right) -$$

$$- \frac{g^2}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} - \frac{1}{2}\sqrt{1+g^2} - \frac{g^3}{3} + \frac{1}{3}(1+g^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^1 =$$

$$= 4\left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right).$$

Takže závěr je

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= 4\left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) \doteq 2{,}97321.$$

Všimněte si, že ač není integrovaná funkce omezená shora, jedná se o nevlastní integrál, je tento integrál konvergentní, tedy má konečnou hodnotu.

Energie nabité desky tedy je

$$E = k\frac{Q^2}{L} I_4 = 4\left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) k\frac{Q^2}{L}.$$

6. Výpočet na počítači

Výpočet pomocí software *Mathematica*

Pro symbolické výpočty na počítači můžeme s výhodou použít počítačový algebraický systém *Mathematica*. Pro výpočet integrálu se použije příkaz `Integrate` a pro získání přibližné numerické hodnoty použijeme příkaz `N` takto:

```
i=Integrate[1/Sqrt[(x-u)^2+(y-v)^2],{x,0,1},{y,0,1},{u,0,1},{v,0,1}]

        -4 (-1 + Sqrt[2] - 3 ArcSinh[1])
Out[1]= --------------------------------
                       3

In[2]:= N[i]
Out[2]= 2.97321
```

Na notebooku s procesorem Intel Core i7 trval výpočet necelé dvě minuty. Tento výsledek je ve shodě s naším ručním výpočtem.

Konkurenční software Maple verze 2018 tento integrál nespočítal vůbec.

Výpočet metodou Monte Carlo

Pro vícenásobné integrály můžeme použít metodu Monte Carlo. To je souhrnný název pro numerické algoritmy, které využívají generátor pseudonáhodných čísel. Pro numerický výpočet nepotřebujeme symbolické operace, proto můžeme napsat program např. v programovacím jazyce C. Ten má tu výhodu, že je dostupný na každém počítači s operačním systémem Linux. Výpočet probíhá tak, že vygenerujeme velký počet čtveřic pseudonáhodných čísel mezi nulou a jedničkou, což budou argumenty integrované funkce. V těchto pseudonáhodných čtveřicích vyčíslíme integrovanou funkci a výsledek přičítáme do proměnné, do které na začátku výpočtu uložíme nulu. Na závěr součet vydělíme počtem vygenerovaných bodů. Pro generování pseudonáhodných čísel použijeme funkci `drand48()`. Program může vypadat např. takto:

```
# include <stdio.h>
# include <math.h>
# include <stdlib.h>
int main ()
{
 int i,im=100000000;
 double x,y,u,v,w,s=0;
 for (i=0;i<im;i++) {
  x = drand48();
  y = drand48();
  u = drand48();
  v = drand48();
  w = sqrt((x-u)*(x-u)+(y-v)*(y-v));
  if(w>0) s += 1/w;
 };
 printf("%G\n",s/im);
 return(0);
}
```

Tento program generuje 10^8 pseudonáhodných čtveřic a výpočet na počítači s procesorem Intel Core i7 trval 3 sekundy a dal výsledek 2,9729, což se shoduje s přesným výsledkem na 4 platné číslice. To je v souladu s očekáváním, že relativní chyba výsledku je nepřímo úměrná odmocnině z počtu bodů.