Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab

Připomeňme si podobnost trojúhelníků

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 1, 18–28

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151063`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2022

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

matematiky a nabízí velký prostor pro experimentování a objevování. Zároveň umožňují zobecnění výsledků a přechod z dekadické soustavy do soustav o jiném základu, což je v současné době ve školské matematice opomíjené téma.

Autoři tohoto článku jsou přesvědčeni, že úlohy podobného typu demonstrují krásu matematiky a prostřednictvím jednoduchých aritmetických výpočtů mohou vzbudit a prohloubit u žáků, studentů i široké veřejnosti zájem o tuto vědu.

Literatura

[1] Maynard, J.: Primes with restricted digits. *Inventiones mathematicae*, 217 (2019), s. 127–218. https://doi.org/10.1007/s00222-019-00865-6.

[2] Khovanova, T.: *86 Conjencture*. https://blog.tanyakhovanova.com/2011/02/86-conjecture/

Připomeňme si podobnost trojúhelníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V elementární rovinné geometrii je zaveden pojem podobnosti trojúhelníků. Je zaveden, mnohdy nedoceněn a nevyužit. Užívání nabiflovaných vzorců v situaci, kdy jádro problému může být vysvětleno užitím podobnosti trojúhelníků, je nejenom zbytečné, ale často i zavádějící (viz [1]).

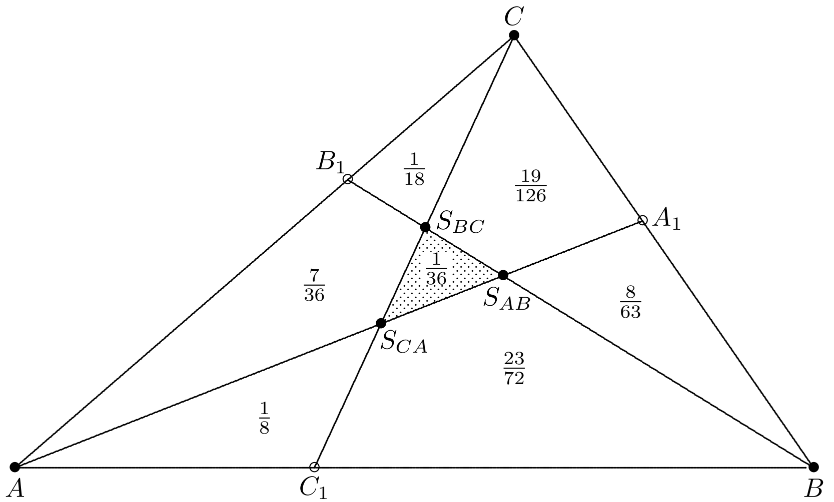
V této krátké poznámce, která může posloužit ve školní výuce, zdůrazníme důležitost pojmu podobnosti trojúhelníků, jenž lze geometricky vyjádřit velmi jednoduše:

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když mají stejné úhly.

Podobnost trojúhelníků je v článku využita k vysvětlení některých vlastností, které jsou společné všem trojúhelníkům. Soustředíme se na jednoduchou otázku, která patří do souboru problémů řešených v [2] užitím barycentrických souřadnic, jenž kulminoval větami Cèvy, Menelause a Routha. Zde podáme zcela elementární důkaz „Hlavního tvrzení“, z něhož Cèvova věta a Routhova věta vyplynou jako důsledky.

Je zábavné sledovat, jakou pozornost věnuje literatura některým speciálním případům těchto vět. Feynmanův fenomén (viz např. [5]) je toho nesporným důkazem. Feynmanův trojúhelník je objasněn na str. 179 článku [1] (viz též [6]).

Cílem tohoto článku je popsat, odůvodnit a zobecnit následující obrázek:



Obr. 1: Obsahy jednotlivých částí trojúhelníku ABC

Zde jsou strany trojúhelníka rozděleny pomocí bodů A_1, B_1 a C_1 v poměrech

$$\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = \frac{4}{3}, \quad \frac{|B_1C|}{|B_1A|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|C_1A|}{|C_1B|} = \frac{3}{5}.$$

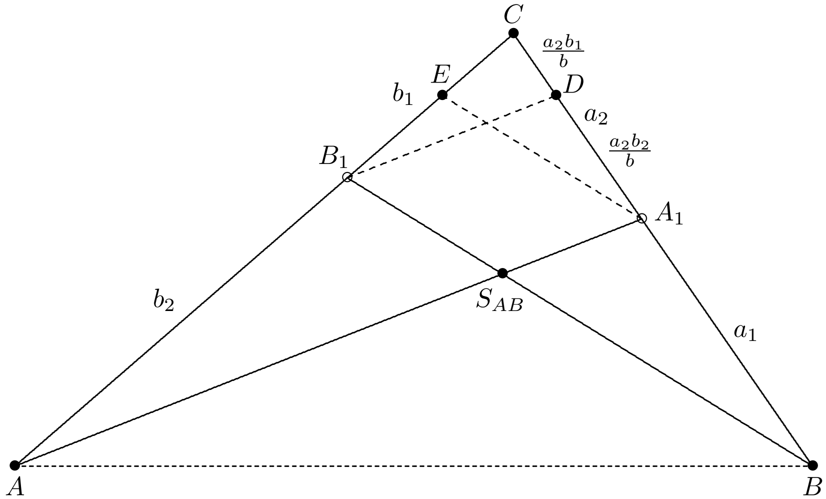
Potom jsou poměry obsahů jednotlivých částí trojúhelníku ABC k obsahu celého trojúhelníku vyjádřeny příslušnými zlomky. Vzniklý trojúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ má obsah rovný $\frac{1}{36}$ obsahu trojúhelníku ABC.

V obecném zadání jsou strany $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ trojúhelníku ABC rozděleny body A_1, B_1 a C_1 na úsečky, jejichž délky označme $a_1 = |A_1B|$, $a_2 = |A_1C|$, $b_1 = |B_1C|$, $b_2 = |B_1A|$, $c_1 = |C_1A|$ a $c_2 = |C_1B|$; tedy $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2, c = c_1 + c_2$.

Cestou k popisu a vysvětlení hodnot na obr. 1 je toto tvrzení.

Tvrzení. *Strana BC je bodem A_1 rozdělena v poměru $\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = \frac{a_1}{a_2}$ a strana CA bodem B_1 v poměru $\frac{|B_1C|}{|B_1A|} = \frac{b_1}{b_2}$. Potom*

$$\frac{|S_{AB}A_1|}{|S_{AB}A|} = \frac{a_1b_1}{a\,b_2} \quad a \quad \frac{|S_{AB}B_1|}{|S_{AB}B|} = \frac{a_2b_2}{a_1b}. \tag{1}$$



Obr. 2: Poměry úseček $\frac{|S_{AB}A_1|}{|S_{AB}A|}$ a $\frac{|S_{AB}B_1|}{|S_{AB}B|}$

V důkazu rovností (1) využijeme podobnosti trojúhelníků: $\triangle B_1DC \sim \sim \triangle AA_1C$ a $\triangle BA_1S_{AB} \sim \triangle BDB_1$. Zde je úsečka DB_1 rovnoběžná s úsečkou A_1A. Tedy

$$\frac{|A_1A|}{|DB_1|} = \frac{b}{b_1} \quad \text{a} \quad \frac{|S_{AB}A_1|}{|DB_1|} = \frac{a_1}{a_1 + \frac{a_2b_2}{b}} = \frac{a_1b}{a_1b + a_2b_2}.$$

Odtud

$$\frac{|S_{AB}A_1|}{|AA_1|} = \frac{a_1b_1}{a_1b + a_2b_2} = \frac{a_1b_1}{a_1b_1 + ab_2}.$$

Proto

$$\frac{|S_{AB}A_1|}{|S_{AB}A|} = \frac{a_1b_1}{a\,b_2}.$$

Zcela stejným způsobem (užitím podobnosti trojúhelníků A_1EC a BB_1C a dále AB_1S_{AB} a AEA_1, kde spojnice EA_1 je rovnoběžná s úsečkou B_1B)

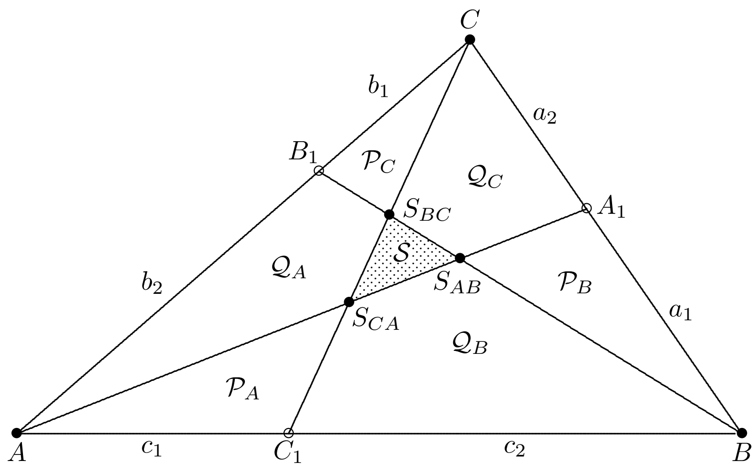
dostaneme rovnost

$$\frac{|S_{AB}B_1|}{|S_{AB}B|} = \frac{a_2b_2}{a_1b} \quad \text{a} \quad \frac{|S_{AB}B_1|}{|BB_1|} = \frac{a_2b_2}{a_1b + a_2b_2}.$$

Předchozí tvrzení můžeme aplikovat na dvojice úseček BB_1, CC_1 se společným bodem S_{BC} a CC_1, AA_1 se společným bodem S_{CA}. Označme $s_a = c_1a + c_2a_2$, $s_b = a_1b + a_2b_2$ a $s_c = b_1c + b_2c_2$ a příslušné poměry zaznamenejme v následující tabulce:

$\frac{\lvert S_{AB}A_1\rvert}{\lvert S_{AB}A\rvert} = \frac{a_1b_1}{ab_2}$	$\frac{\lvert S_{AB}A_1\rvert}{\lvert AA_1\rvert} = \frac{a_1b_1}{s_b}$	$\frac{\lvert S_{AB}B_1\rvert}{\lvert S_{AB}B\rvert} = \frac{a_2b_2}{a_1b}$	$\frac{\lvert S_{AB}B_1\rvert}{\lvert BB_1\rvert} = \frac{a_2b_2}{s_b}$
$\frac{\lvert S_{BC}B_1\rvert}{\lvert S_{BC}B\rvert} = \frac{b_1c_1}{bc_2}$	$\frac{\lvert S_{BC}B_1\rvert}{\lvert BB_1\rvert} = \frac{b_1c_1}{s_c}$	$\frac{\lvert S_{BC}C_1\rvert}{\lvert S_{BC}C\rvert} = \frac{b_2c_2}{b_1c}$	$\frac{\lvert S_{BC}C_1\rvert}{\lvert CC_1\rvert} = \frac{b_2c_2}{s_c}$
$\frac{\lvert S_{CA}C_1\rvert}{\lvert S_{CA}C\rvert} = \frac{c_1a_1}{ca_2}$	$\frac{\lvert S_{CA}C_1\rvert}{\lvert CC_1\rvert} = \frac{c_1a_1}{s_a}$	$\frac{\lvert S_{CA}A_1\rvert}{\lvert S_{CA}A\rvert} = \frac{c_2a_2}{c_1a}$	$\frac{\lvert S_{CA}A_1\rvert}{\lvert AA_1\rvert} = \frac{c_2a_2}{s_a}$

Vraťme se nyní k trojúhelníku ABC se stranami a, b, c, rozdělenými body A_1, B_1, C_1 na úseky a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Úsečkami AA_1, BB_1, CC_1 je trojúhelník rozdělen na sedm částí.



Obr. 3: Obsahy částí trojúhelníku ABC v obecném případě

Hlavní tvrzení. *Označíme-li obsah trojúhelníku ABC symbolem Δ, obsahy trojúhelníků AC_1S_{CA}, BA_1S_{AB} a CB_1S_{BC} jsou*

$$\mathcal{P}_A = \frac{c_1^2a_1}{cs_a}\Delta, \quad \mathcal{P}_B = \frac{a_1^2b_1}{as_b}\Delta \quad a \quad \mathcal{P}_C = \frac{b_1^2c_1}{bs_c}\Delta.$$

Dále, obsahy čtyřúhelníků $AS_{CA}S_{BC}B_1$, $BS_{AB}S_{CA}C_1$ a $CS_{BC}S_{AB}A_1$ jsou

$$\mathcal{Q}_A = \frac{c_1(a_2bs_c - b_1^2s_a)}{bs_cs_a}\Delta, \quad \mathcal{Q}_B = \frac{a_1(b_2cs_a - c_1^2s_b)}{cs_as_b}\Delta,$$
$$\mathcal{Q}_C = \frac{b_1(c_2as_b - a_1^2s_c)}{as_bs_c}\Delta.$$

Obsah $\mathcal{S}$ trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ je rozdíl Δ a součtu všech $\mathcal{P}$'s a $\mathcal{Q}$'s.

Důkaz hlavního tvrzení opět využije poměrů geometrických veličin. Obsah trojúhelníku AC_1C je $\frac{c_1}{c}\Delta$. Jelikož

$$\frac{|S_{CA}C_1|}{|CC_1|} = \frac{c_1a_1}{s_a},$$

dostáváme

$$\mathcal{P}_A = \frac{c_1^2a_1}{c\,s_a}\Delta$$

a podobně

$$\mathcal{P}_C = \frac{b_1^2c_1}{b\,s_c}\Delta,$$

a tedy

$$\mathcal{Q}_A = \left(\frac{c_1}{c} - \frac{c_1^2a_1}{cs_a} - \frac{b_1^2c_1}{bs_c}\right)\Delta = c_1\left(\frac{s_a - c_1a_1}{cs_a} - \frac{b_1^2}{bs_c}\right) =$$
$$c_1\left(\frac{c_1a_1 + c_1a_2 + c_2a_2 - c_1a_1}{cs_a} - \frac{b_1^2}{bs_c}\right)\Delta = c_1\left(\frac{a_2}{s_a} - \frac{b_1^2}{bs_c}\right)\Delta =$$
$$= \frac{c_1(a_2bs_c - b_1^2s_a)}{bs_cs_a}\Delta.$$

Obdobným způsobem dostaneme pomocí trojúhelníků BA_1A a CB_1B hodnoty pro $\mathcal{P}_B$, $\mathcal{Q}_B$ a $\mathcal{Q}_C$.

Tím je důkaz hlavního tvrzení dokončen.

Alespoň slůvkem poznamenejme, že jsme podali důkaz pro případ, kdy bod C_1 leží mezi vrcholem A a průsečíkem strany AB a přímky určené body C a S_{AB}. Ihned vidíme, že případ, kdy C_1 leží mezi tímto průsečíkem a vrcholem B, řešíme zcela obdobným způsobem.

Hraniční případ, kdy C_1 s průsečíkem strany AB a přímky určené body C a S_{AB} , tj. případ, kdy body S_{AB}, S_{BC} a S_{CA} splývají, je popsán větou Cèvovou. Připomeňme ji v následující formě.

Tvrzení (věta Cèvova). *Kterékoliv dva z bodů S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} splývají (což je ekvivalentní s tím, že všechny tři body splývají) právě tehdy, když*

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2.$$

Vezměme libovolné dva body, třeba $S_{AB} = S_{CA}$. To znamená totéž, co

$$\frac{|S_{AB}A_1|}{|S_{AB}A|} = \frac{a_1b_1}{ab_2} = \frac{|S_{CA}A_1|}{|S_{CA}A|} = \frac{c_2a_2}{c_1a}.$$

A to znamená totéž, co $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$.

Věta Cèvova je bezprostředním důsledkem věty Routhovy. Tu zde formulujeme ve tvaru vzorce (2) a ukážeme, že (2) je pouhým přepisem hlavního tvrzení.

Tvrzení (Věta Routhova).

$$\frac{\mathcal{S}}{\Delta} = \frac{(a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2)^2}{s_as_bs_c}. \tag{2}$$

Zde je přepis Hlavního tvrzení:
Poměr obsahů trojúhelníků $\mathcal{S} = S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ a $\Delta = ABC$ se rovná

$$\frac{\mathcal{S}}{\Delta} = 1 - \left(\frac{c_1^2a_1}{cs_a} + \frac{a_1^2b_1}{as_b} + \frac{b_1^2c_1}{bs_c}\right) -$$

$$- \left(\frac{c_1(a_2bs_c - b_1^2s_a)}{bs_cs_a} + \frac{a_1(b_2cs_a - c_1^2s_b)}{cs_as_b} + \frac{b_1(c_2as_b - a_1^2s_c)}{as_bs_c}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{c_1a_2}{s_a} + \frac{a_1b_2}{s_b} + \frac{b_1c_2}{s_c}\right) =$$

$$= \frac{s_as_bs_c - c_1a_2s_bs_c - a_1b_2s_as_c - b_1c_2s_as_b}{s_as_bs_c}.$$

Dosadíme-li za s_a, s_b a s_c výrazy

$$s_a = c_1a_1 + c_1a_2 + c_2a_2,$$
$$s_b = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2,$$
$$s_c = b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_2,$$

a vyjádříme a porovnáme v čitateli všech $27+3\cdot 9 = 54$ součinů, obdržíme rovnost

$$s_a s_b s_c - c_1 a_2 s_b s_c - a_1 b_2 s_a s_c - b_1 c_2 s_a s_b = (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2)^2,$$

čímž je rovnost (2) dokázána.

Poznámka. V literatuře (viz např. [4]) nalezneme Routhovu větu ve tvaru

$$\frac{\mathcal{S}}{\Delta} = \frac{\left(\frac{a_2 b_2 c_2}{a_1 b_1 c_1} - 1\right)}{\left(\frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} + \frac{b_2}{b_1} + 1\right)\left(\frac{b_2 c_2}{b_1 c_1} + \frac{c_2}{c_1} + 1\right)\left(\frac{c_2 a_2}{c_1 a_1} + \frac{a_2}{a_1} + 1\right)}.$$

Přesvědčte se, že se jedná o stejnou rovnost jako (2).

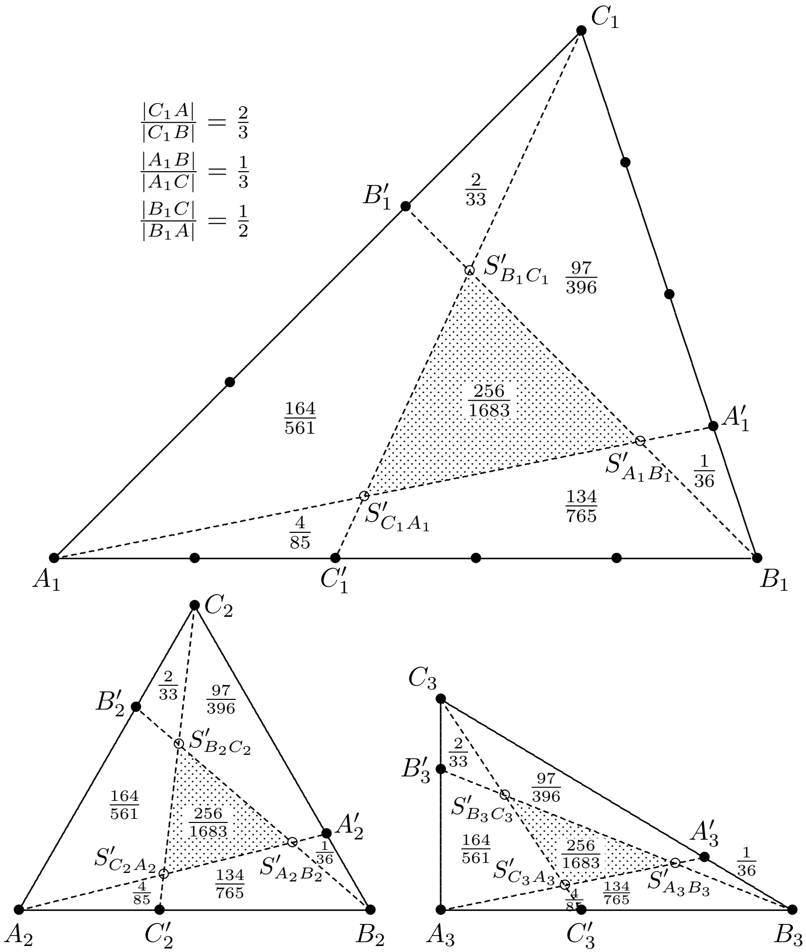
Nyní přikročme k samotnému poslání tohoto článku. Po nabytí zkušeností z předchozích úvah a výpočtů, je nyní snadné porozumět jádru našich tvrzení a shledat, že není podstatné, aby čísla a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2, která se v našich tvrzeních a výpočtech objevují, představovala skutečné rozměry stran trojúhelníků a jejich úseků. Podstatné jsou poměry těchto veličin, tj. čísla $\frac{a_1}{a}$, $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c}$, $\frac{c_1}{c_2}$ a od nich odvozené veličiny. Tak např. číslo a je součtem dvou hodnot (jmenovatele a čitatele) vyjadřujících poměr $\frac{a_1}{a_2}$. V tomto smyslu budeme formulovat naše tvrzení ve zbytku článku.

Výrazným důsledkem je skutečnost, že poměry obsahů částí trojúhelníku k obsahu trojúhelníku ABC vyznačené na obrázku 1 jsou nezávislé na volbě trojúhelníka. Závisí pouze na poměrech, v nichž jsou jeho strany rozděleny.

Poměry obsahů jednotlivých částí trojúhelníku k obsahu celého trojúhelníku na obr. 1 odpovídají volbě $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$ a $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{5}$. Zkontrolujte hodnoty v obr. 1 užitím hlavního tvrzení.

Následující obr. 4 výrazně znázorňuje skutečnost, že tyto poměry obsahů nezávisí na volbě trojúhelníků.

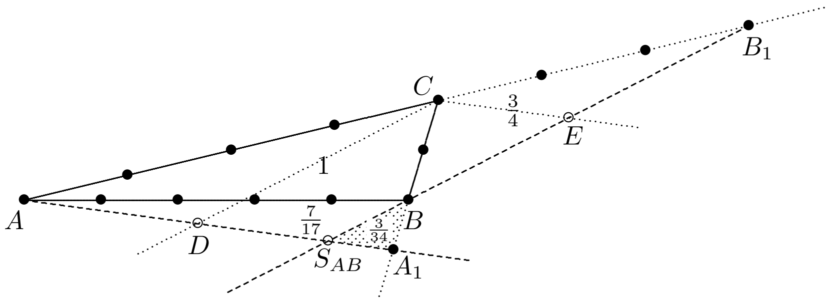
Důležitá je též poznámka, že čísla figurující v našich tvrzeních nemusí být celá čísla. Tak např. všechna naše tvrzení můžeme užít pro trojúhelník, jehož strany o délce $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a 2 jsou rozděleny na úseky 1 a $\sqrt{2}-1$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ a $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\sqrt{3}$ a $2-\sqrt{3}$. Ty mohou být v našich výpočtech reprezentovány čísly $a_1 = 1+\sqrt{2}$, $a_2 = 1$, $a = 2+\sqrt{2}$, $b_1 = 2-\sqrt{3}$, $b_2 = 1$, $b = 3-\sqrt{3}$, $c_1 = 3+2\sqrt{3}$, $c_2 = 1$, $c = 4+2\sqrt{3}$.



Obr. 4: Podstatná role poměrů vzdáleností

V závěrečné poznámce zobecníme předchozí výsledky na případ, kdy body A_1, B_1, C_1 nemusí ležet na stranách trojúhelníku ABC. Obr. 5 znázorňuje situaci, kdy bod A_1 leží na prodloužené straně BC a bod B_1 na prodloužené straně CA. Přitom

$$\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad \frac{|B_1C|}{|B_1A|} = \frac{3}{7}. \tag{3}$$



Obr. 5: Obecná poloha A_1 a B_1

Ukážeme, že poměry délek úseček, které jsou definovány průnikem S_{AB} přímek určených body A, A_1 a B, B_1, stejně jako obsahy vzniklých trojúhelníků, lze určit stejným způsobem, jaký jsme užívali dosud. Podobnost trojúhelníků $\triangle S_{AB}A_1B \sim \triangle ECB$ a $\triangle S_{AB}AB_1 \sim \triangle ECB_1$ implikuje rovnost poměrů

$$\frac{|S_{AB}A_1|}{|BA_1|} = \frac{|EC|}{|BC|} \quad \text{a} \quad \frac{|S_{AB}A|}{|B_1A|} = \frac{|EC|}{|B_1C|},$$

odkud plyne

$$\frac{|S_{AB}A_1|}{|S_{AB}A|} = \frac{|BA_1||B_1C|}{|BC||B_1A|} = \frac{3}{14}. \tag{4}$$

Podobnost trojúhelníků $\triangle B_1S_{AB}A \sim \triangle CDA$ a $\triangle BS_{AB}A_1 \sim \triangle CDA_1$ zaručuje rovnost

$$\frac{|S_{AB}B_1|}{|S_{AB}B|} = \frac{|CA_1||B_1A|}{|BA_1||CA|} = \frac{21}{4}. \tag{5}$$

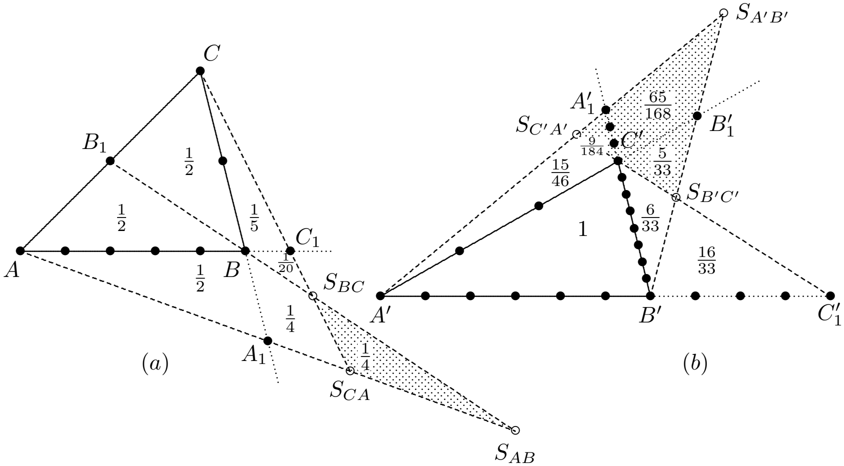
K určení poměrů obsahů $\mathcal{P}$ trojúhelníků $AS_{AB}B$, BB_1C a A_1BS_{AB} využijeme rovnosti (3), (4) a (5). Označíme-li obsah $\mathcal{P}(ABC)$ trojúhelníku ABC pomocí Δ, dostáváme postupně

$$\mathcal{P}(AA_1B) = \frac{1}{2}\Delta, \quad \mathcal{P}(AA_1C) = \frac{3}{2}\Delta, \quad \mathcal{P}(ABB_1) = \frac{7}{4}\Delta,$$

$$\mathcal{P}(AS_{AB}B) = \frac{4}{17}\mathcal{P}(ABB_1) = \frac{7}{17}\Delta,$$

a tedy

$$\mathcal{P}(A_1BS_{AB}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{17}\right)\Delta = \frac{3}{34}\Delta.$$



Obr. 6 (a) (b): Obecná poloha bodů A_1, B_1, C_1 a A_1', B_1', C_1'

Obr. 6 ilustruje dvě typické situace. Trojúhelník (a) popisuje případ, kdy body A_1 a C_1 jsou zvoleny na prodloužených stranách BC a AB v poměru

$$\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = \frac{1}{3}, \quad \frac{|B_1C|}{|B_1A|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|C_1A|}{|C_1B|} = 6.$$

V tomto případě je celkem snadné určit potřebné poměry úseček jako

$$\frac{|S_{AB}A_1|}{|S_{AB}A|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|S_{CA}C_1|}{|S_{CA}C|} = \frac{2}{5}, \quad \frac{|S_{BC}B_1|}{|S_{BC}B|} = 3$$

k určení poměrné velikosti obsahů, jak popisuje první obrázek. Zde je

$$\mathcal{P}(S_{AB}S_{BC}S_{CA}) = \frac{1}{4}\mathcal{P}(ABC).$$

Poněkud náročnější je výpočet těchto poměrů v případě trojúhelníku (b). Zde dostáváme např.

$$\frac{|S_{A'B'}A_1'|}{|S_{A'B'}A'|} = \frac{11}{32}, \quad \frac{|S_{C'A'}C_1'|}{|S_{C'A'}C'|} = \frac{55}{9}, \quad \frac{|S_{B'C'}B_1'|}{|S_{B'C'}B'|} = \frac{5}{6}.$$

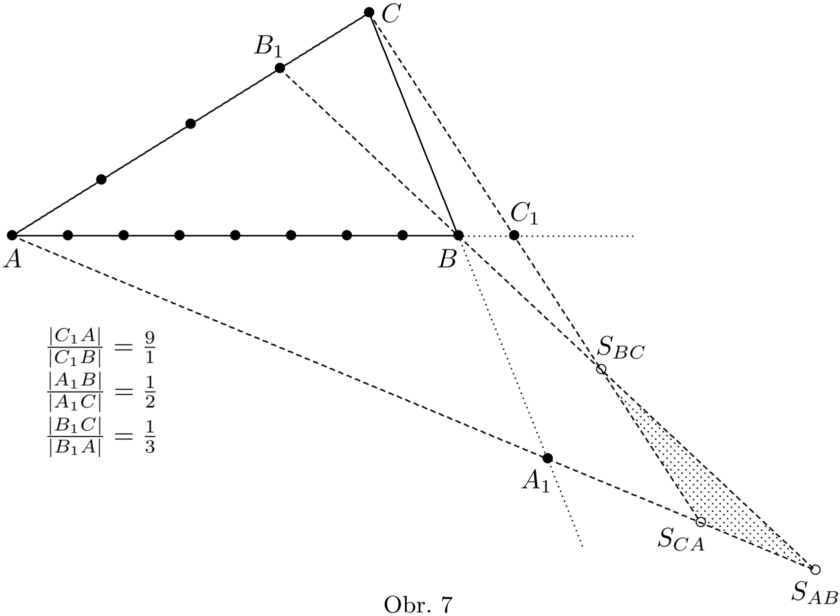
Poměry obsahů šesti trojúhelníků a jednoho čtyřúhelníku jsou vyznačeny v obrázku. Obsah trojúhelníku $S_{A'B'}S_{B'C'}S_{C'A'}$ zde splňuje

$$\mathcal{P}(S_{A'B'}S_{B'C'}S_{C'A'}) = \frac{6241}{10626}\,\mathcal{P}(A'B'C').$$

Článek zakončeme následující úlohou: Těchto sedm čísel

$$\frac{3}{40},\ \frac{1}{8},\ \frac{9}{70},\ \frac{1}{4},\ \frac{13}{35},\ \frac{3}{4},\ 1$$

reprezentujících poměry obsahů k obsahu trojúhelníku ABC přiřaďte k sedmi oblastem obr. 7.



Obr. 7

L i t e r a t u r a

[1] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, 71 (2009), s. 169–182.

[2] Dlab, V.: III. Aplikace: Věta Cèvova, věta Menelaova a věta Routhova. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 91 (2016), s. 1–13.

[3] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* Serifa, Praha, 2016.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Routh%27s_theorem`

[5] `https://www.jstor.org/stable/3620856?refreqid=excelsior%3A84a74d8f898362921b23a805ff468856`

[6] `https://www.geogebra.org/m/ejck6sb9`