Učitel matematiky

Emil Calda

Kombinace nejen s nesousedními členy

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 4, 215–219

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151019`

KOMBINACE NEJEN S NESOUSEDNÍMI ČLENY

Emil Calda

V článku [1] byl určen počet způsobů, jimiž lze z čísel $1, 2, \ldots, n$ vybrat k-člennou skupinu tak, aby každá dvě čísla v ní obsažená se lišila aspoň o dvě a nezáleželo přitom na jejím uspořádání. Šlo o tzv. *kombinace s nesousedními členy*, což jsou k-členné kombinace z čísel $1, 2, \ldots, n$ utvořené tak, že neobsahují žádná dvě čísla sousední, tj. žádnou dvojici čísel $i, i+1$, kde $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Pro tyto kombinace byla dokázána věta:

Počet k-členných kombinací sestavených z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, že žádná z nich neobsahuje dvě čísla sousední, je

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

V uvedeném článku byla věta dokázána na základě autorova tvrzení, že počet k-členných kombinací z čísel $1, 2, \ldots, n$, v nichž nejsou žádná dvě čísla sousední, je stejný jako počet k-členných kombinací z čísel $1, 2, \ldots, n-k+1$. Tento postup je po matematické stránce sice v pořádku, ale studenti (a nejen oni) se často ptají, jak jsme přišli na to, že počty těchto kombinací se rovnají. Neumíme-li na tuto otázku uspokojivě odpovědět, může v nich vzniknout dojem, že matematické věty — nepadají-li přímo z nebe — vznikají tak, že matematik je osvícen náhlým vnuknutím. Pokusíme se proto ukázat, jak je možno k uvedené větě dospět, aniž bychom čekali, až nás napadne. Použijeme k tomu známého výsledku:

Počet rozmístění k identických předmětů do n přihrádek je roven počtu $P'(k, n-1)$ permutací ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje k-krát a druhý $(n-1)$-krát.

Začneme konkrétní ukázkou a vypíšeme si všechny k-členné kombinace z čísel $1, 2, \ldots, n$ s nesousedními členy pro $n = 7$,

$k = 3$. Každou tuto trojčlennou kombinaci zakódujeme pomocí uspořádané sedmice sestavené ze tří jedniček a čtyř nul, jejímž i-tým členem je jednička právě tehdy, když číslo i je členem této kombinace:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 3 & 5 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 6 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 7 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 4 & 6 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 4 & 7 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 5 & 7 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 4 & 6 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 4 & 7 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 5 & 7 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 5 & 7 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Vzhledem k tomu, že toto přiřazení trojčlenných kombinací s nesousedními členy a uspořádaných sedmic ze tří jedniček a čtyř nul je vzájemně jednoznačné, je hledaný počet těchto kombinací roven počtu těchto uspořádaných sedmic. V obecném případě k-členných kombinací s nesousedními členy z čísel $1, 2, \dots, n$ jde tedy o počet uspořádaných n-tic sestavených z k jedniček a z $n-k$ nul tak, že mezi každými dvěma sousedními jedničkami je aspoň jedna nula.

Představme si nyní každou tuto uspořádanou n-tici jako rozmístění $n-k$ nul do $k+1$ přihrádek určených k jedničkami; např. uspořádaná sedmice 0 1 0 0 1 0 1 představuje rozmístění čtyř nul do čtyř přihrádek, ve kterém je v první přihrádce (vlevo od první jedničky) jedna nula, ve druhé (mezi první a druhou jedničkou) dvě nuly, ve třetí přihrádce (mezi druhou a třetí jedničkou) jedna nula a ve čtvrté přihrádce (vpravo od poslední jedničky) žádná nula. Chceme určit počet všech možných rozmístění $n-k$ nul do $k+1$ přihrádek, přičemž v každé přihrádce vyjma obou krajních (!) je aspoň jedna nula. Stačí si nyní uvědomit, že každé takovéto rozmístění dostaneme tak, že do každé přihrádky vyjma obou krajních (těchto přihrádek je $(k+1)-2 = k-1$) dáme právě jednu nulu a zbývajících $(n-k)-(k-1) = n-2k+1$ nul rozmístíme zcela libovolně do daných $k+1$ přihrádek. Za předpokladu, že počet nul, které nám zbudou po rozmístění jedné nuly do každé z $k-1$ vnitřních přihrádek je nezáporný, tj. pokud $n-2k+1 \geq 0$, můžeme toto rozmístění provést $P'(n-2k+1, k)$ způsoby. Máme tak výsledek:

Počet uspořádaných n-tic sestavených z k jedniček a $n-k$ nul tak, že mezi každými dvěma sousedními jedničkami je aspoň jedna nula, je $P'(n-2k+1, k)$.

Vzhledem k tomu, že

$$P'(n-2k+1, k) = \frac{(n-k+1)!}{k!\,(n-2k+1)!} = \binom{n-k+1}{k},$$

je tím věta o počtu k-členných kombinací s nesousedními členy z čísel $1, 2, \ldots, n$ odvozena. Pro srovnání s následujícím budeme ji však raději formulovat takto:

Počet k-členných kombinací sestavených z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, že v každé se každá dvě čísla liší aspoň o dvě, je

$$P'(n-2k+1, k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

Zajímejme se nyní o to, jaký je počet k-členných kombinací sestavených z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, že v každé se každá dvě čísla liší aspoň o tři. Pro ilustraci vypišme opět všechny tyto kombinace pro $n = 8$, $k = 3$ spolu s přiřazenými uspořádanými osmicemi ze tří jedniček a pěti nul:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 4 & 7 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 4 & 8 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 5 & 8 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 5 & 8 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Zase je vidět, že počet těchto k-členných kombinací sestavených z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, že v každé se každá dvě čísla liší aspoň o tři, je roven počtu rozmístění $n-k$ nul do $k+1$ přihrádek, přičemž v každé přihrádce vyjma obou krajních jsou aspoň dvě nuly. Každé toto rozmístění dostaneme, když do každé přihrádky až na obě krajní dáme právě dvě nuly a zbývajících

$$(n-k)-2(k-1)=n-3k+2$$

nul rozmístíme do všech $k+1$ přihrádek libovolným způsobem. (Snadno zjistíme, že to lze provést jen pro $n-3k+2 \geq 0$). Dostaneme tak:

Počet k-členných kombinací sestavených z čísel $1,2,\ldots,n$ tak, že v každé se každá dvě čísla liší aspoň o tři, je

$$P'(n-3k+2,k)=\frac{(n-2k+2)!}{k!\,(n-3k+2)!}=\binom{n-2k+2}{k}.$$

Na závěr se ptejme obecně, jaký je počet k-členných kombinací sestavených z čísel $1,2,\ldots,n$ tak, že v každé se každá dvě čísla liší aspoň o m, kde m je přirozené. Stejně jako v předchozích případech dáme do každé vnitřní přihrádky, kterých je $k-1$, právě $m-1$ nul a nuly, které zůstanou (je jich $(n-k)-(m-1)(k-1)$), rozmístíme libovolným způsobem do $k+1$ přihrádek. Za předpokladu

$$(n-k)-(m-1)(k-1)\geq 0$$

to lze provést

$$P'(n-k-(m-1)(k-1),k)=P(n-km+m-1)$$

způsoby. Máme tak výsledek:

Počet k-členných kombinací sestavených z čísel $1,2,\ldots,n$ tak, že v každé se každá dvě čísla liší aspoň o m, je

$$P'(n-km+m-1,k)=\frac{(n-k(m-1)+m-1)!}{k!\,(n-km+m-1)!}=$$

$$=\binom{n-k(m-1)+m-1}{k}.$$

Povšimněme si ještě, že tento vzorec platí i pro k-členné kombinace z čísel $1, 2, \ldots, n$ bez opakování i s opakováním. U kombinací bez opakování jsou totiž každá dvě čísla různá, takže se liší aspoň o jednu, což v symbolice námi používané znamená $m = 1$. Dosazením do odvozeného vzorce dostaneme vskutku:

$$P'(n - k \cdot 1 + 1 - 1, k) = P'(n - k, k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

V případě kombinací s opakováním se mohou některá čísla navzájem rovnat. To však znamená, že v těchto k-členných kombinacích se každá dvě čísla liší aspoň o $m = 0$. Dosazení do vzorce tuto poněkud překvapivou domněnku potvrdí:

$$P'(n-k\cdot 0+0-1, k) = P'(n-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Způsob, kterým byly výše uvedené vzorce odvozeny, ukazuje, že představa rozmisťování identických předmětů do přihrádek je pro řešení kombinatorických úloh velmi užitečná. Někdy si myslím, že by se o ní měli něco dovědět i naši studenti.

LITERATURA

[1] Calda E., *Kombinace s nesousedními členy*, Matematika, fyzika, informatika **5** (1996/97), 285-288.