Učitel matematiky

Emil Calda

Rozmisťovací úlohy a počty k-členných kombinací

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 2, 90–94

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150976`

ROZMISŤOVACÍ ÚLOHY

a počty k-členných kombinací

Emil Calda

V následujících řádcích si ukážeme, jakým způsobem je možno odvodit známé vzorce pro počet k-členných kombinací z n prvků (s opakováním i bez opakování) pomocí rozmisťování identických předmětů do přihrádek.

Předpokládejme, že je dáno k identických předmětů; určeme počet všech způsobů jejich rozmístění do n přihrádek. Na tato rozmístění přitom neklademe žádné podmínky, takže připouštíme i možnost, že některé přihrádky zůstanou prázdné. Každé takovéto rozmístění dostaneme tak, že dané předměty seřadíme vedle sebe (protože jsou identické, lze to provést jediným způsobem) a do mezer této řady nebo na její začátek či konec vsuneme $n-1$ přepážek, které dané předměty rozdělují do n přihrádek. Na obr. 1 je takto znázorněno rozmístění deseti identických předmětů do šesti přihrádek, ve kterém jsou první dvě přihrádky zleva prázdné, ve třetí jsou tři předměty, ve čtvrté jich je šest, v páté žádný a v šesté jeden.

Obr. 1

Je zcela jasné, že každému tomuto schematu složenému z k kroužků a z $n-1$ svislých čárek odpovídá právě jedno rozmístění k identických předmětů do n přihrádek a obráceně. Každé takovéto schema však můžeme považovat za permutaci ze dvou prvků (kroužek, svislá čárka), ve které se jeden opakuje k-krát a druhý $(n-1)$-krát, což znamená, že počet $P'(k,n-1)$ těchto permutací určuje i hledaný počet rozmístění daných předmětů. Odtud plyne:

Počet rozmístění k identických předmětů do n přihrádek je roven počtu $P'(k,n-1)$ permutací ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje k-krát a druhý $(n-1)$-krát.

Všimněme si dále souvislosti mezi úlohou rozmístit k identických předmětů do n přihrádek a úlohou určit počet celočíselných nezáporných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k\ .$$

Snadno zdůvodníme, že každému rozmístění k identických předmětů do n přihrádek odpovídá právě jedno celočíselné nezáporné řešení uvedené rovnice a obráceně. Uvědomme si, že celočíselným nezáporným řešením této rovnice se rozumí uspořádaná n-tice $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou celá nezáporná čísla, jejichž součet je k. Představíme-li si nyní složky této n-tice jako přihrádky, ve kterých je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ předmětů, jejichž celkový počet je k, je tím nalezeno vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech celočíselných nezáporných řešení uvedené rovnice a množinou všech rozmístění k identických předmětů do n přihrádek. Jako ilustraci lze uvést rozmístění deseti identických předmětů do šesti přihrádek znázorněné na obr. 1, kterému odpovídá celočíselné nezáporné řešení $(0, 0, 3, 6, 0, 1)$ rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10\ .$$

Platí tedy:

Počet všech celočíselných nezáporných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k\ ,$$

kde $k \in N$, je roven počtu rozmístění k identických předmětů do n přihrádek, tj. počtu $P'(k, n-1)$ permutací ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje k-krát a druhý $(n-1)$-krát.

Hledejme nyní počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků. Označíme-li tyto prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$, můžeme každou k-člennou kombinaci s opakováním z těchto prvků zapsat ve tvaru

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} \ldots a_n^{x_n}\ ,$$

kde exponenty x_i určují, kolikrát se prvek a_i v této kombinaci vyskytuje. Znamená to, že x_i jsou celá nezáporná čísla, jejichž součet je roven k, takže uspořádaná n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je celočíselným nezáporným řešením rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k\ .$$

Odtud je vidět, že každé k-členné kombinaci s opakováním z n prvků odpovídá jediné celočíselné nezáporné řešení uvedené rovnice a obráceně. Odvodili jsme tak, že platí:

Počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je roven počtu všech celočíselných nezáporných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k\ ,$$

tj. počtu $P'(k, n-1)$ permutací ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje k-krát a druhý $(n-1)$-krát.

Tímto způsobem jsme získali vzorec pro počet $K\,(k, n)$ k-členných kombinací s opakováním z n prvků:

$$K\,(k, n) = P'(k, n-1) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{k}\ .$$

Všechny výsledky, které jsme získali, se dají shrnout:

Čísla udávající počet rozmístění k identických předmětů do n přihrádek, počet celočíselných nezáporných řešení rovnice $x_1 + {}$ ${} + x_2 + \cdots + x_n = k$, počet k-členných kombinací s opakováním z n prvků a počet $P'(k, n-1)$ permutací s opakováním ze dvou prvků se navzájem rovnají.

Pro úplnost ještě odvodíme vzorec pro počet k-členných kombinací (bez opakování) z n prvků. Označíme-li je $a_1, a_2, \ldots, a_n$, můžeme každou jejich k-člennou kombinaci bez opakování zapsat ve tvaru

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} \ldots a_n^{x_n}\ ,$$

kde exponenty x_i nabývají hodnot 0 a 1 (neboť v každé této kombinaci je každý z daných prvků nejvýše jednou) a jejich součet je roven k. Je opět jasné, že počet všech těchto k-členných kombinací je roven počtu všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k\ ,$$

ve kterých všechna x_i jsou celá nezáporná čísla nejvýše rovna jedné. Pro $k > n$ takovéto n-tice neexistují, neboť tato rovnice nemá žádné řešení požadovaných vlastností. Pro $k < n$ je řešením této rovnice každá uspořádaná n-tice sestavená z k jedniček a $n-k$ nul, jejichž počet je dán číslem $P'(k, n-k)$. Zjistili jsme tak, že platí:

Počet všech k-členných kombinací (bez opakování) z n prvků je roven počtu všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k\ ,$$

ve kterých každé x_i je rovno nule nebo jedné, tj. počtu $P'(k, n-k)$ permutací ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje k-krát a druhý $(n-k)$-krát.

Tímto způsobem jsme získali vzorec pro počet $K(k, n)$ k-členných kombinací (bez opakování) z n prvků:

$$K(k, n) = P'(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\ .$$

Závěrem si ještě dovoluji připojit stručnou poznámku týkající se používané terminologie. Kvůli jednoduchosti v ní bude řeč pouze o kombinacích, ale to, co bude řečeno, platí i pro variace. Současná terminologie vzbuzuje ve studentech dojem, že existují pouze kombinace dvojího typu, a to kombinace bez opakování a kombinace s opakováním, a že tyto pojmy jsou ke všemu ještě disjunktní. Ve skutečnosti jsou však kombinace bez opakování zvláštním případem kombinací s opakováním, navíc pak nikoli jediným – na kombinace s opakováním lze klást i jiné podmínky než jenom tu, aby se v nich každý z daných prvků vyskytoval nejvýše jednou. Zdá se mi proto, že by bylo vhodnější a pro studenty srozumitelnější, kdyby se pro nynější kombinace s opakováním používal název kombinace a pro současné kombinace se zavedlo označení kombinace bez opakování. Z této dvojice pojmů kombinace a kombinace bez opakování by snad bylo lépe vidět, že nejsou disjunktní a že kombinace bez opakování jsou zvláštním případem kombinací. Jsem si samozřejmě vědom toho, že dosavadní označení je obvyklé a běžně používané po dlouhá desetiletí a že na střední škole, kde známe pouze tyto dva typy kombinací, s ním vystačíme. Otázkou ovšem je, zda by se tyto historické názvy neměly pozměnit.

S VÍTĚZNÝM ÚSMĚVEM NA RTECH ODCHÁZÍ GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN OD KONKURZNÍ KOMISE, NEBOŤ PRÁVĚ DOKÁZAL, ŽE JEHO AKADEMICKÁ FUNKCE JE SPOJITÁ NA CELÉM ČASOVÉM INTERVALU JEHO KARIÉRY.