

Učitel matematiky

Ján Žabka

Prvé stretnutia s nekonečnom alebo O dlhodobej propedeutike vo vyučovaní matematiky

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 3, 189–192

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150951>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2000

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PRVÉ STRETNUTIA S NEKONEČNOM
ALEBO O DLHODOBEJ PROPEDEUTIKE
VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

JÁN ŽABKA

Každý z nás, kto učil na základnej škole kapitolu celé čísla, mi dá iste za pravdu, že žiaci s nimi majú omnoho menšie problémy, ak sme sa pred týmto tematickým celkom „hrali“ s farebnými číslami (červené čísla – dlh, čierne čísla – hotovosť), naučili sme sa sčítovať dve rovnako farebné čísla i dve rôznofarebné čísla. Takúto prípravu napr. na tematický celok nazývame propedeutika, presnejšie krátkodobá propedeutika.

V matematike (najmä stredoškolskej, o vysokoškolskej ani nehovoriac) sú však omnoho náročnejšie pojmy, postupy, poznatky ako celé čísla. Spomeňme len niektoré: matematická indukcia, iracionálne čísla, komplexné čísla, kvantifikátory, funkcie, limita a spojitosť, rovnomerná spojitosť, logaritmus, Pokračovať by sme mohli dlho.

V nových, modernejších a kvalitnejších učebniciach sa čoraz častejšie pred samotným vysvetlením týchto pojmov objavuje motivácia k ich zavedeniu, v lepšom prípade i krátkodobá propedeutika. Podľa môjho názoru je to však pri náročných pojmoch stále málo. Ak má žiak skutočne porozumieť napr. matematickej indukcii, veľkému kvantifikátoru, nekonečnému geometrickému radu, je nutné, aby sa s nekonečnom stretol omnoho skôr — už na základnej škole. Toto platí i pre ostatné pojmy. Preto sa nazdávam, že by bolo vhodné, keby sa do učebníc (i do učebných plánov) zaradila aj dlhodobá propedeutika. Jej úlohou v žiadnom prípade nie je dopredu prezrádzať žiakom odpoveď na zložité otázky, skôr ich pre nich primeraným spôsobom oboznámiť s týmito otázkami, nasadiť im „chrobáka do hlavy“. Je dôležité, aby napr. pojem nekonečna bol diskutovaný, analyzovaný, rozkladaný. Nazdávam sa, že deti, ktoré sa približne v desiatich rokoch stretli so známym

Zenónovým paradoxom o Achillovi a korytnačke, majú lepšie pripravený „priestor“ na pochopenie limity postupnosti a neskôr i limity funkcie.

Vo svojom príspevku ponúkam niekoľko námětov dlhodobej propedeutiky. Okrem názvu uvádzam i časť matematiky, na ktorú žiakov pripravujeme, teda napr. *Achilles a korytnačka* (Limita postupnosti). Všetky náměty sú vhodné na druhý stupeň ZŠ.

Námět 1: *Čo je väčšie $0,9\bar{9}$ alebo 1?* (Limita postupnosti, nekonečný proces)

Túto otázku môžeme položiť deťom, keď sa dostatočne oboznámia s desatinnými číslami s periodickým rozvojom. Zväčša vznikne zaujímavá diskusia, do ktorej často vyučujúci nemusí vôbec zasahovať.

Námět 2: *Hľadá sa zlomok* (Iracionálne čísla, limita postupnosti, nekonečný proces)

Úlohou pre deti bude pomocou kalkulačky nájsť zlomok, ktorý je čo najbližšie k $\sqrt{2}$. Samozrejme, že predpokladáme znalosť významu odmocniny. Úlohu môžeme zjednodušiť: treba nájsť zlomok čo najbližší k $\sqrt{2}$, ktorého čitateľ je menší ako 10 (správna odpoveď je $\frac{7}{5}$). Potom príde tá istá úloha, len menovateľ je z intervalu 10 – 99 (v tomto prípade je odpoveď $\frac{99}{70}$) a na záver príde tá istá úloha s menovateľom od 100 do 999 (tá si už vyžaduje triednu spoluprácu). Okrem nácviku práce s kalkulačkou si deti „na vlastnej koži“ skúsia, že sa $\sqrt{2}$ nedá vyjadriť v tvare zlomku a omnoho lepšie prijmú existenciu iracionálnych čísel.

Námět 3: *Čo dosadiť?* (Iracionálne čísla, kvadratické rovnice, nekonečný proces)

Úloha je podobná predchádzajúcej: nájdite desatinné číslo, ktoré keď zapíšeme namiesto trojuholníka, dostaneme rovnosť: $\nabla \cdot \nabla + \nabla - 1 = 0$. Ide vlastne o kvadratickú rovnicu, ktorej riešením je $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

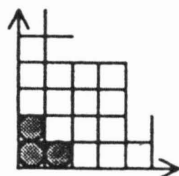
Námět 4: *Sčítujeme do nekonečna.* (Nekonečné rady)

Vezmeme rad $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ a pýtame sa, aký je jeho súčet. Ak niekto tvrdí, že 0, rad uzatvorkujeme $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$, resp. $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$. Ak

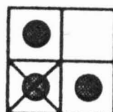
naopak, niekto tvrdí, že výsledok je 1, rad uzátvorkujeme takto $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$. Ako to teda vlastne je?

Námet 5: *Hráme sa s mincami* (Neexistencia riešenia (invarianty))

Na tri políčka v rohu nekonečnej šachovnice umiestnime mince ako na obrázku:



Každú mincu môžeme nahradiť dvoma takto:



Teda po každom ťahu pribudne jedna minca. Môžeme pomocou takýchto ťahov uvoľniť všetky tri pôvodne obsadené políčka?

Námet 6: *Najrovnostrannejší trojuholník* (Iracionalnosť čísel, analytická geometria)

Úlohou detí bude narysovať trojuholník tak, aby jeho vrcholy ležali v mrežových bodoch danej pravouhlej sústavy súradníc a zároveň, aby bol tento trojuholník rovnostranný alebo čo najviac rovnostranný.

Námet 7: *Mimozemšťania* (Princíp vylúčenia tretieho)

Mimozemšťania z planéty Alfa 31 sa chvália, že majú strelu, ktorá všetko prestrelí. Mimozemšťania z planéty Beta 32 sa chvália, že majú pancier, ktorý je neprestrielný. Predpokladajme, že ani jedny neklamú. Čo sa stane, keď mimozemšťania z planéty Alfa 31 vystrelia svoju strelu na pancier z planéty Beta 32? Prestrelí alebo neprestrelí?

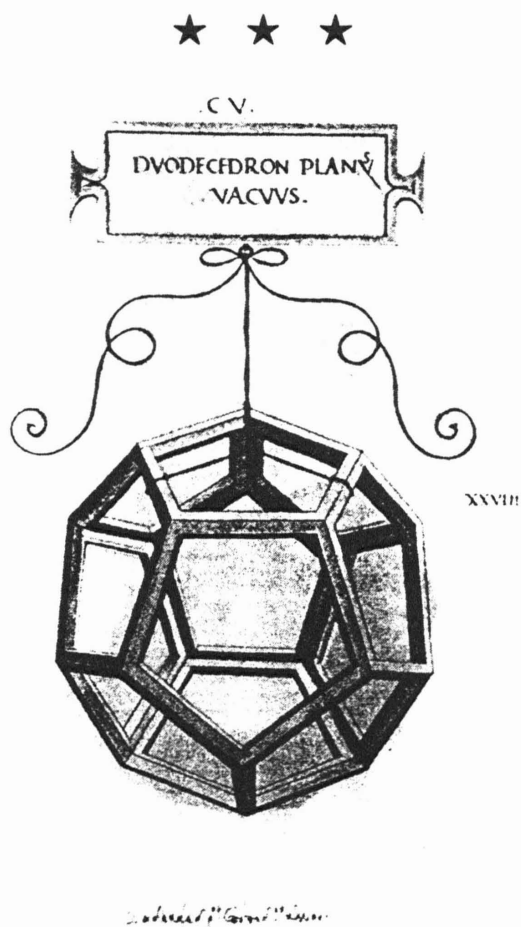
Námet 8: *Párne a prirodzené čísla* (Mohutnosť nekonečných množín)

Predstavte si, že každé prirodzené číslo sa chytí za ruku so svojim dvojnásobkom. Bude mať každé prirodzené číslo dvojicu? Bude mať každé párne číslo dvojicu? Ktorých je vlastne viac?

Námet 9: Nezvyčajné útvary (Mohutnosť nekonečných množín)

Viete nakresliť dva útvary tak, aby jeden bol vlastnou podmnožinou druhého? Nájdete viac riešení? Čo majú tieto riešenia spoločné?

Takýchto námetov je veľa. Námetom môže byť takmer každá úloha, ktorú nevieme riešiť s vedomosťami žiaka ZŠ, vieme riešiť s vedomosťami študenta SŠ, dokážeme ju rozumne naformulovať a je pre deti atraktívna. Budem rád, ak ma budete o vašich námetoch alebo o skúsenostiach s ponúknutými námetmi informovať, najlepšie mailom (zabka@fmph.uniba.sk).



Kresba dvacetistěnu od Leonarda da Vinciho