Dag Hrubý

O jednom rozkladu

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 3, 172–173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150948

O JEDNOM ROZKLADU

DAG HRUBÝ

V rámci opakování k maturitní zkoušce z matematiky jsem zadal studentům úkol rozložit v součin mnohočlen

$$x^8 + x^4 + 1.$$

Na první pohled se mi zdál tento problém zcela triviální a tak jsem si to předem nevyzkoušel. Začátek byl poměrně snadný, celkem bez problémů studenti přišli na rozklad

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2).$$

Zde bylo opět připomenuto, že každý mnohočlen $P(x)$ s reálnými koeficienty stupně $n \geq 3$ je rozložitelný v R na součin lineárních či nejvýše kvadratických faktorů. Mnohočlen $x^4 + x^2 + 1$ problémy nečinil a studenti brzy odhalili rozklad

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

s tím, že mnohočleny x^2+x+1, x^2-x+1 jsou už v R nerozložitelné. Problémy však nastaly u mnohočlenu

$$x^4 - x^2 + 1.$$

Zdálo se, že předcházející postup není použitelný. Úprava

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 + x^2$$

samozřejmě nevede k cíli. Nastala chvíle ticha, i pan profesor se zarazil. Možná, že někteří znáte tento pocit, který bývá v nejlepším případě ukončen zvoněním. Přesto doporučuji vyšetřit si chvíli a oznámit studentům, že to nyní nevíte, ale že to vysvětlíte příští hodinu. Pokud se Vám to nestává každý týden, tak to není ještě ztraceno. V mém případě jsem si vzpomenul na rozklad

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s),$$

který po vynásobení pravé strany a porovnání koeficientů jistě vede k cíli. Zdálo se mi to v tuto chvíli příliš komplikované. Během dalšího přemýšlení zazvonilo. Zahájil jsem taktický ústup, a slíbil, že to určitě vyřešíme příští hodinu, a že uvítám, kdyby některý ze studentů problém vyřešil doma. Ihned po skončení hodiny jsem se pustil do práce.

$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$

$x^4 - x^2 + 1 = x^4 + px^3 + qx^2 + rx^3 + prx^2 + qrx + sx^2 + psx + qs$

$x^4 - x^2 + 1 = x^4 + (p + r)x^3 + (q + pr + s)x^2 + (qr + ps)x + qs.$

Z poslední rovnice plyne

$$p + r = 0 \implies q + pr + s = -1$$
$$qr + ps = 0 \implies qs = 1.$$

Z první a poslední rovnice vyjádříme r, resp. s, dosadíme do zbývajících dvou a po úpravách dostáváme

$$q^2 - (p^2 - 1) + 1 = 0 \implies p(1 - q^2) = 0.$$

Z druhé rovnice plyne, že $p = 0$ nebo $q^2 = 1$. Snadno se přesvědčíme, že hodnota $p = 0$ nevyhovuje a pro q připadá v úvahu pouze hodnota $q = 1$. Je-li tedy $q = 1$, potom je $|p| = \sqrt{3}$ a $p = \sqrt{3}$ nebo $p = -\sqrt{3}$. Vzhledem k $p+r = 0$ stačí uvažovat hodnoty $q = 1, p = \sqrt{3}$. Nyní už můžeme psáti

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Teprve v tomto okamžiku jsem si uvědomil, jak jsem hloupý a jak se nevyplácí podceňovat zdálivě nevinný příklad. Teprve nyní mi došlo, že lze jednoduše napsat

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 3x^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{3}x)(x^2 + 1 - \sqrt{3}x).$$

Tento postup lze zobecnit takto:

$$x^4 + cx^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (2 - c)x^2 =$$
$$= (x^2 + 1 + \sqrt{2 - c}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2 - c}x)$$

za podmínky $c \leq 2$.