Milan Hejný; Darina Jirotková

Čtverečkovaný papír, trojúhelníky a Pickova formule

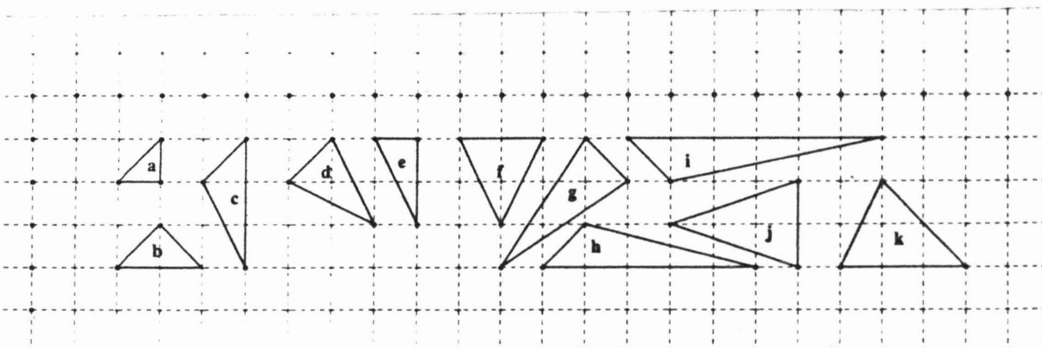
Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 3, 129–135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150941

ČTVEREČKOVANÝ PAPÍR, TROJÚHELNÍKY A PICKOVA FORMULE

Milan Hejný, Darina Jirotková

Na obrázku 1 je nakresleno jedenáct trojúhelníků na čtverečkovaném papíře. Jsou to mřížové trojúhelníky, tedy takové, které mají všechny tři vrcholy v mřížových bodech čtvercové sítě[1].



Obr. 1

Všimněme si, že trojúhelník **a**, jehož obsah je $S = \frac{1}{2}$, nemá kromě vrcholů žádný mřížový bod ani na hranici ani uvnitř. Trojúhelník **b** s obsahem $S = 1$ má na hranici 4 mřížové body (z nich tři jsou vrcholy), ale žádný mřížový bod neleží uvnitř tohoto trojúhelníku. Trojúhelník **d** s obsahem $S = \frac{3}{2}$ má tři mřížové body na hranici (jsou to vrcholy) a jeden mřížový bod uvnitř. Trojúhelník **f** s obsahem $S = 2$ má čtyři mřížové body na hranici a jeden mřížový bod leží uvnitř trojúhelníku. U každého z trojúhelníků na obrázku 1 evidujeme tři údaje: h = počet mřížových bodů na jeho hranici, v = počet mřížových bodů ležících uvnitř trojúhelníku a S jeho obsah. Přehledně je soubor všech těchto 33 údajů uveden v tabulce 1.

[1] Mřížovým bodem rozumíme průsečík linek čtverečkovaného papíru.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
h	3	4	5	3	6	4	3	7	8	4	6
v	0	0	0	1	0	1	2	0	0	2	1
S	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	3	3

Tab. 1

Podíváte-li se podrobně na údaje do tabulky, vidíte, že tři čísla každého sloupce (h, v, S) jsou vázána ne příliš složitým vztahem:

$$S = v + \frac{h}{2} - 1, \tag{1}$$

který nese jméno Pickova formule[2].

Pickova formule dává jednoduchý návod na určení obsahu mřížového trojúhelníku. Platí nejen pro trojúhelníky, ale i pr mřížové čtyřúhelníky, pětiúhelníky, obecně pro všechny mřížové n-úhelníky.

Důkaz Pickovy formule najde čtenář v časopise Kvant, číslo 12, ročník 1974, strana 42. Z formule (1) okamžitě plyne toto důležité tvrzení:

Tvrzení 1. *Je-li S obsah mřížového mnohoúhelníku, pak $2S$ je číslo přirozené.*

K řešení následujících úloh budeme využívat tato pomocná tvrzení:

Tvrzení A. *Jsou-li A, B mřížové body, je i obraz $sA(B)$ bodu B ve středové souměrnosti se středem A mřížový bod.*

Tvrzení B. *Je-li na mřížové úsečce jediný další mřížový bod, pak je to střed úsečky.*

Tvrzení C. *Je-li na mřížové úsečce AB kromě bodů A, B ještě dalších n mřížových bodů, pak vzdálenost kterýchkoliv soused-*

[2]Georg Alexander Pick (1859–1942), německý matematik, po 40 let profesor na německé univerzitě v Praze.

ních dvou z těchto $n+2$ *mřížových bodů je stejná a rovná se* $\frac{1}{(n+1)|AB|}$.

V tomto článku se na Pickovu formuli podíváme z jiného konce. Nebudeme hledat obsahy trojúhelníků, ale obráceně, k danému obsahu S budeme hledat všechny možné mřížové trojúhelníky s různými čísly h a v. Tak například pro $S = \frac{5}{2}$ má rovnice (1) tři možná řešení: $h = 7$, $v = 0$, nebo $h = 5$, $v = 1$ a konečně $h = 3$, $v = 2$. Z těchto tří řešení je první případ realizován trojúhelníkem **h** z obrázku 1, třetí trojúhelníkem **g**, ale druhý případ na obrázku 1 realizován není. Pokusme se jej najít.

Úloha 1. Najděte mřížový trojúhelník, pro který je $h = 5$, $v = 1$.

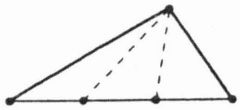
Dlouho jsme se snažili, řešení se nám však najít nepodařilo. Postupně jsme docházeli k názoru, že naše úsilí je marné, a tak jsme se pokusili o řešení jiné úlohy.

Úloha 2. Dokažte, že neexistuje mřížový trojúhelník, pro který je $h = 5$, $v = 1$.

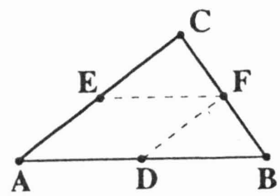
Tuto úlohu se nám vyřešit podaří. Zkoumejme podrobně rozložení mřížových bodů na stranách hledaného mřížového trojúhelníku. Kromě tří vrcholů musí být na hranici hledaného trojúhelníku ještě další dva mřížové body. Nastávají tedy právě dvě možnosti:

I. Na jedné straně trojúhelníku leží čtyři mřížové body (obr. 2). V tomto případě lze sestrojovaný trojúhelník rozložit na tři mřížové trojúhelníky, které mají stejný obsah S'. (Trojúhelníky mají stejné výšky a podle Tvrzení C mají shodné i odpovídající strany.)
Je-li $S' = \frac{1}{2}$, pak obsah S původního trojúhelníku je $\frac{3}{2}$. Je-li $S' = 1$, pak $S = 3$. V žádném případě není $S = \frac{5}{2}$, což z údajů $h = 5$, $v = 1$ vyplývá podle (1).

II. Na dvou stranách trojúhelníku leží vždy tři mřížové body (obr. 3). Při označení podle obrázku 3 musí být D střed strany AB (tj. $D = A - o - B$) a podobně $E = A - o - C$. Označme $F = B - o - C$. Čtyřúhelník $ADFE$ je potom rovnoběžník. Protože tři z vrcholů tohoto rovnoběžníku jsou mřížové body, je podle Tvrzení 5 nutně i čtvrtý vrchol bodem mřížovým. Potom je ale pro tento trojúhelník ABC $h \geq 6$, což odporuje zadání.



Obr. 2



Obr. 3

Mřížový trojúhelník, kde $h = 5$ a $v = 1$, neexistuje.

K ukončení řešení úlohy 2 musíme ještě dokázat Tvrzení 1. Tuto úlohu přenecháme čtenáři.

Další náročnější úlohu rozdělíme do čtyř kroků:

Úloha 3. Dokažte postupně všechna následující Tvrzení.

Tvrzení 2 *Do roviny, na níž je nakreslena čtvercová síť, lze zavést souřadnicovou soustavu tak, že platí:*

$$\text{Bod } Z(x,y) \text{ je mřížový právě tehdy,}$$
$$\text{když obě souřadnice } x,\ y \text{ jsou celá čísla.} \tag{2}$$

Tvrzení 3. *Jsou-li $U(a,b)$, $V(c,d)$ dva libovolné body, pak bod $W = U - o - V$ má souřadnice $W(a + \frac{c}{2}, b + \frac{d}{2})$.*

Tvrzení 4. *Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník právě tehdy, když $K - o - M = L - o - N$.*

Tvrzení 5. *Nechť čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník na čtverečkovaném papíře. Potom platí: Jsou-li tři z vrcholů K, L, M, N body mřížové, je i čtvrtý z nich bodem mřížovým.*

Přímým důsledkem posledního tvrzení je

Tvrzení 6. *Jsou-li v mřížovém trojúhelníku středy dvou jeho stran body mřížové, pak i střed třetí strany je bod mřížový.*

Úloha 4. Najděte všechny možnosti pro hodnoty h, v, když $S = 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$.

Řešení: viz tabulka 2.

h	6	4	7	5	3	8	6	4	9	7	5	3
v	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3
S	2		$\frac{5}{2}$			3			$\frac{7}{2}$			

h	10	8	6	4	11	9	7	5	3
v	0	1	2	3	0	1	2	3	4
S	4				$\frac{9}{2}$				

Tab. 2

V dalším zaměříme naši pozornost na otázku, které z těch případů lze a které nelze realizovat. Z předcházejícího víme, že oba případy pro $S = 2$ realizovat lze (obrázek 1e, 1f), že pro $S = \frac{5}{2}$ dva případy realizovat lze (obrázek 1h, 1g) a jeden nelze (úloha 2), že pro $S = 3$ lze realizovat všechny tři případy (obrázek 1i, 1j, 1h).

Úloha 5. Které ze čtyř případů tabulky 2 pro $S = \frac{7}{2}$ lze realizovat?

Řešení (částečné). Podařilo se nám realizovat jen dva případy:
Pro $\triangle OAB, O(0,0), A(7,0), B(0,1)$ je $h = 9$ a $v = 0$.
Pro $\triangle OCD, O(0,0), C(3,4), D(4,3)$ je $h = 3$ a $v = 3$. Jak je to s případy $h = 7$, $v = 1$ a $h = 5$, $v = 2$, zatím nevíme, máme však podezření, že ty realizovat nejde.

Úloha 6. Dokažte, že neexistuje mřížový trojúhelník s čísly $h = 7$, $v = 1$, $S = \frac{7}{2}$.

Řešení. Předpokládejme, že se nám hledaný trojúhelník ABC podařilo najít. Kromě tří vrcholů leží na jeho hranici ještě právě 4 další mřížové body. Nechť AB je ta strana, na níž leží nejvíce mřížových bodů. Pak je tento počet (včetně bodů A, B) buď 6, nebo 5, nebo 4. Spojme bod C s každým mřížovým bodem strany AB. Tím vznikne rozklad trojúhelníku ABC na mřížové trojúhelníky se stejným obsahem S'. Jejich počet je 5, nebo 4, nebo 3. Protože $S = \frac{7}{2}$, musí být S' rovno $\frac{7}{10}$, nebo $\frac{7}{8}$, nebo $\frac{7}{6}$. Všechny tři uvedené možnosti odporují tvrzení 1.

Úloha 7. Dokažte, že neexistuje mřížový trojúhelník s čísly $h = 5$, $v = 2$ a $S = \frac{7}{2}$.

Řešení přenecháme čtenáři.

Úloha 8. Které ze čtyř případů tabulky 2 pro $S = 4$ lze realizovat?

Řešení. Podařilo se nám realizovat všechny čtyři případy:
Pro $\triangle OAB, O(0,0), A(8,0), B(0,1)$ je $h = 10$ a $v = 0$.
Pro $\triangle OCD, O(0,0), C(4,0), D(0,2)$ je $h = 8$ a $v = 1$.
Pro $\triangle OEF, O(0,0), E(4,0), F(1,2)$ je $h = 6$ a $v = 2$.
Pro $\triangle OGH, O(0,0), G(2,0), H(1,4)$ je $h = 4$ a $v = 3$.

Úloha 9. Které z pěti případů tabulky 2 pro $S = \frac{9}{2}$ lze realizovat?

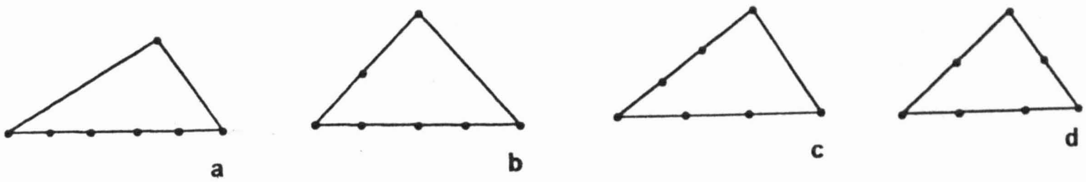
Řešení (částečné). Podařilo se nám realizovat čtyři případy:
Pro $\triangle OAB, O(0,0), A(9,0), B(0,1)$ je $h = 11$ a $v = 0$.
Pro $\triangle OCD, O(0,0), C(3,0), D(0,3)$ je $h = 9$ a $v = 1$.
Pro $\triangle OCE, O(0,0), C(3,0), E(1,3)$, je $h = 5$ a $v = 3$.
Pro $\triangle OFG, O(0,0), F(5,4), G(4,5)$ je $h = 3$ a $v = 4$.
Případ $h = 7$, $v = 2$ je nutno ještě prošetřit.

Úloha 10. Dokažte, že neexistuje mřížový trojúhelník s čísly $h = 7$, $v = 2$, $S = \frac{9}{2}$.

Řešení. Probereme všechny možnosti pro $h = 7$, bez ohledu na číslo v.

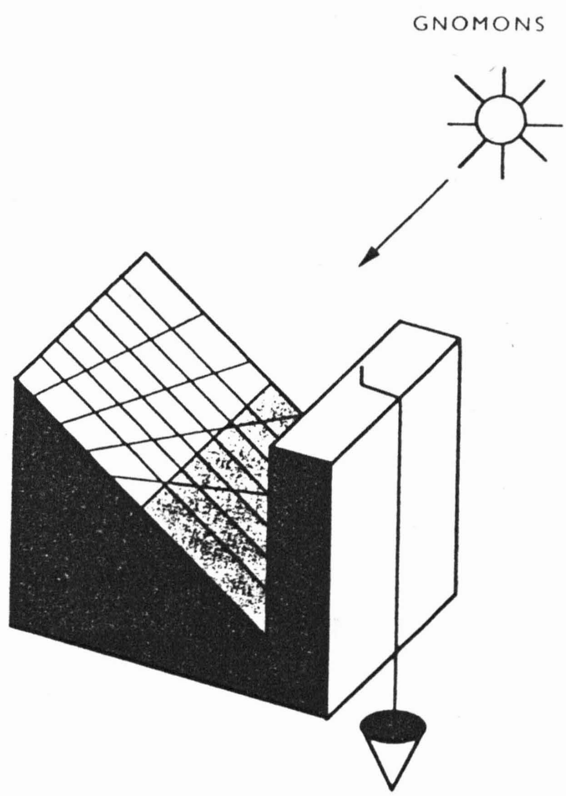
Kombinatoricky vzato existují 4 možnosti rozložení mřížových bodů na hranici trojúhelníku. Jsou načrtnuty na obrázku 4. Ukážeme, že případy na obrázcích **b**, **c**, **d** nejsou realizovatelné. V případech **b** a **d** dochází k tomu, že středy dvou stran trojúhelníku jsou mřížové body a střed třetí strany mřížovým bodem není — to odporuje Tvrzení 6. V případě **c** lze lehce pomocí Tvrzení 5 dokázat, že i na třetí straně trojúhelníku musí být další dva mřížové body. Zůstává tedy případ **a**. Rozdělíme tento trojúhelník na 5 mřížových trojúhelníků úsečkami spojujícími vrchol trojúhelníku se všemi mřížovými body na protilehlé straně. Obsahy těchto trojúhelníků jsou stejné. Označme je S'. Potom bude obsah celého trojúhelníku S roven $5S'$. Jestliže je ale $S = \frac{9}{2}$, pak $S' = \frac{9}{10}$, což odporuje Tvrzení 1.

Cílem předloženého článku bylo upozornit čtenáře na zajímavou problematiku a nikoliv dát její vyčerpávající řešení. Domníváme se totiž, že sama činnost a snaha řešitele najít úplné řešení problému je cennější než čtení vyřešeného problému. V této oblasti existuje hodně smysluplných otázek vyzývajících jak ke konstruování zatím neznámých objektů, tak k dokazování neexistence objektů. Jsme přesvědčeni, že toto geometricko–konstruktivisticko–aritmetické prostředí lze dobře využít pedagogicky.



Obr. 4

★ ★ ★



Egyptské sluneční hodiny