Marie Kupčáková

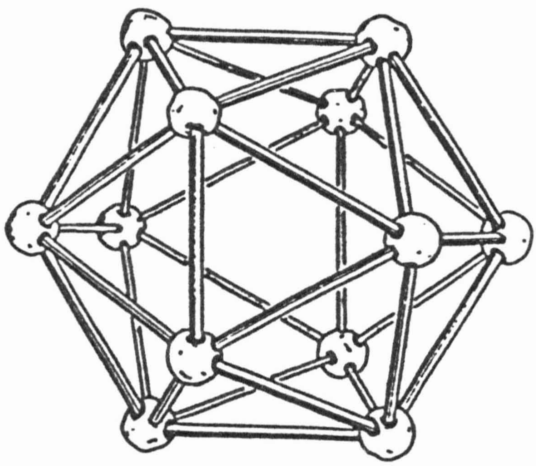
Modelování těles - návrhy úloh pro geometrické praktikum (1)

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 3, 160–167

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150888

MODELOVÁNÍ TĚLES – NÁVRHY ÚLOH PRO GEOMETRICKÉ PRAKTIKUM (1)

MARIE KUPČÁKOVÁ



Stereometrické úlohy se většinou netěší velké oblibě ani u žáků, ani u učitelů, a to na všech stupních škol. Je to možná i tím, že se řeší stále stejný okruh problémů a navíc metodami, které mnohdy odrazují (řešení úloh ve volném rovnoběžném promítání). V různých životních situacích nás pak překvapí, když naši spoluobčané nedokážou pojmenovat jehlan, hranol, komolá tělesa apod., studenti vysoké školy zaměňují čtyřstěn a čtyřboký jehlan, osmistěn a osmiboký hranol atp.

V seminářích geometrie pro budoucí učitele matematiky se snažíme uvést studenty do praktické činnosti s geometrickými objekty manuální prací s modely, kterou mohou formou praktik rozvíjet i na ZŠ.

Zkušenosti z výuky na pedagogické fakultě nás tak přivedly k návrhu geometrického praktika na úrovni žáků základní školy, který vám předkládáme.

Budeme dále uvádět texty úloh a krátké komentáře k nim.

A. Modelování konvexních mnohostěnů

Pro každého studenta (žáka) je připravena podložka z umělé hmoty (popř. karton), malá krabička, ve které je asi 40 oboustranně zahrocených párátek (budeme jim říkat špejle), špalíček tzv. **„Plastiliny JOVI“** (rozhodně nelze použít jiný typ, tato hmota je dostatečně pevná i tvárná, nelepivá, není mastná, lze ji řezat) a kousek plíšku (cca 2×8 cm).

Předpokládám, že čtenář si dokáže jednotlivé vymodelované útvary představit, nebo si je zkusí vytvářet souběžně s pročítáním textu a prohlížením návodných obrázků.

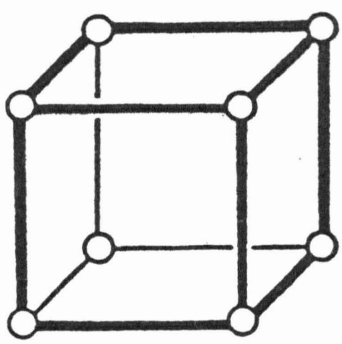
1. *Kuličkami modelíny o průměru asi 8 mm budeme modelovat vrcholy tělesa, špejlemi hrany tělesa. Vymodelujte* **krychli**. *Kolik budete potřebovat kuliček a kolik špejlí?* (obr. 1)

   Při řešení úlohy můžeme připomenout známý Eulerův vzorec $s + v - h = 2$ pro počet s stěn, počet v vrcholů a počet h hran mnohostěnu.

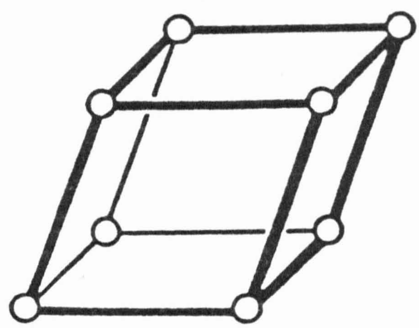
   Vytvořenému modelu budeme říkat **hranový model** krychle.

2. *Můžeme hranový model krychle změnit v model* **rovnoběžnostěnu**? *Pokuste se o to.* (obr. 2)

   Těleso nemusí být určeno délkami svých hran. Krychle i rovnoběžnostěn mají shodné hrany, jsou to však různá tělesa.



Obr. 1



Obr. 2

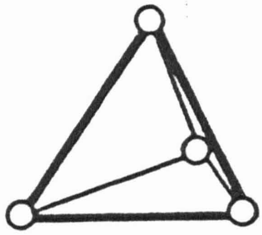
3. *Vymodelujte těleso, které je délkami svých hran určeno.*

   Před řešením úlohy připomeneme, že ani rovnoběžník není určen délkami svých stran. Délkami stran je však určen trojúhelník. Nyní lze očekávat, že po řadě experimentů vymodelují žáci **pravidelný čtyřstěn** (obr. 3).

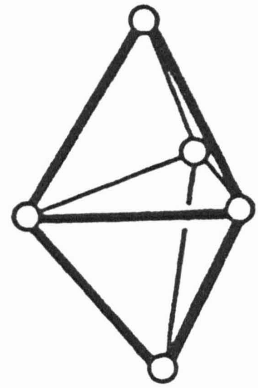
4. *Přidáním dalších špejlí vymodelujte ze čtyřstěnu* **šestistěn**. (obr. 4)

5. *Porovnejte krychli a šestistěn, které jste vymodelovali.* (obr. 5)

   Každé z těles má šest stěn, obě tělesa jsou šestistěny (ani počtem stěn není tedy mnohostěn určen), stěny krychle jsou čtverce, stěny šestistěnu jsou rovnostranné trojúhelníky.



Obr. 3

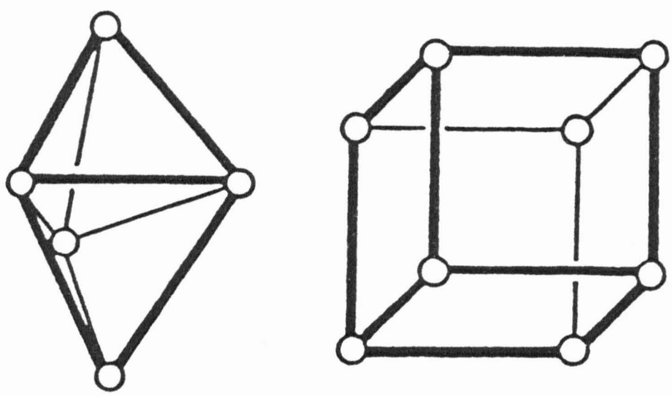


Obr. 4

Protože řecké tiskací písmeno „delta“ má tvar trojúhelníku, říká se mnohostěnům, jejichž stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, **deltastěny**. Vymodelovali jsme tedy **delta-šestistěn**.

Znáte jiný deltastěn? (Čtyřstěn je deltastěn.)

Kterému z dosud vymodelovaných mnohostěnů bychom mohli opsat či vepsat kulovou plochu?



Obr. 5

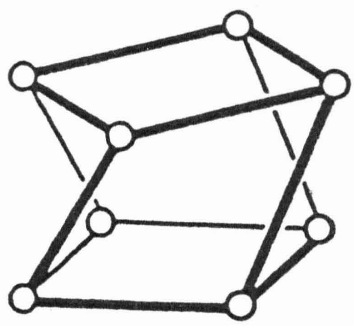
6. Modelína JOVI je dostatečně tvárná, abychom mohli provést i následující úkol:

Otočte horní podstavu hranového modelu krychle kolem svislé osy tělesa o 45° *tak, aby se model nerozpadl.* (obr. 6)

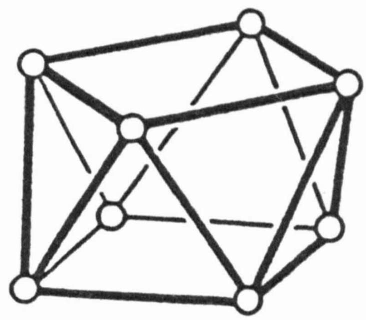
Vytvořený model není modelem mnohostěnu, neboť hrany horní podstavy jsou mimoběžné s hranami dolní podstavy.

Doplňte model dalšími špejlemi tak, aby těleso mělo tvar „bubínku“. (obr. 7)

Povrch mnohostěnu bude tvořit osm rovnostranných trojúhelníků a dva čtverce podstav. Vzniklé těleso se někdy nazývá **hranolec**.



Obr. 6



Obr. 7

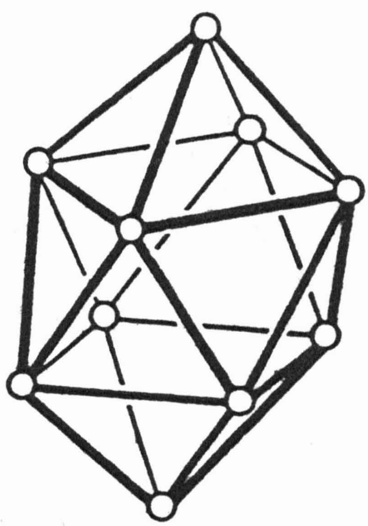
7. *Připojte k získanému hranolci další špejle a kuličky tak, aby vznikl deltastěn.* (obr. 8)

Nad podstavami tak sestrojíme pravidelné čtyřboké jehlany.

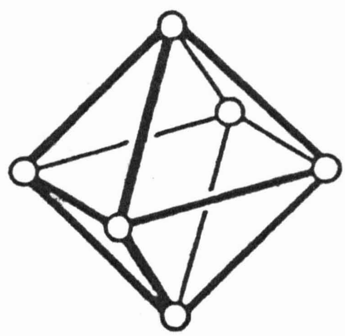
Popište získané těleso. Je to tzv. **delta - šestnáctistěn**. V jeho dvou vrcholech se stýkají čtyři rovnostranné trojúhelníky, v osmi vrcholech se stýká vždy pět trojúhelníků. Říkáme, že vrcholy mnohostěnu mají různou **valenci**.

8. *Podívejte se na model delta-šestistěnu. Jakou valenci mají jeho vrcholy?*

(Valenci 3 a 4.)



Obr. 8



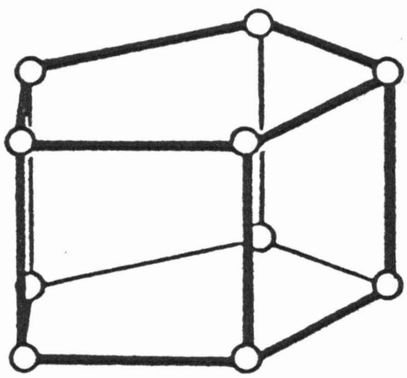
Obr. 9

9. *Demontujte s rozvahou delta-šestnáctistěn tak, abyste mohli efektivně vymodelovat* **delta-osmistěn**. (obr. 9)

Je to tzv. čtyřboká dvojpyramida či čtyřboký dvojjehlan. (Vytvořené hranové modely pro další práci nepotřebujeme.)

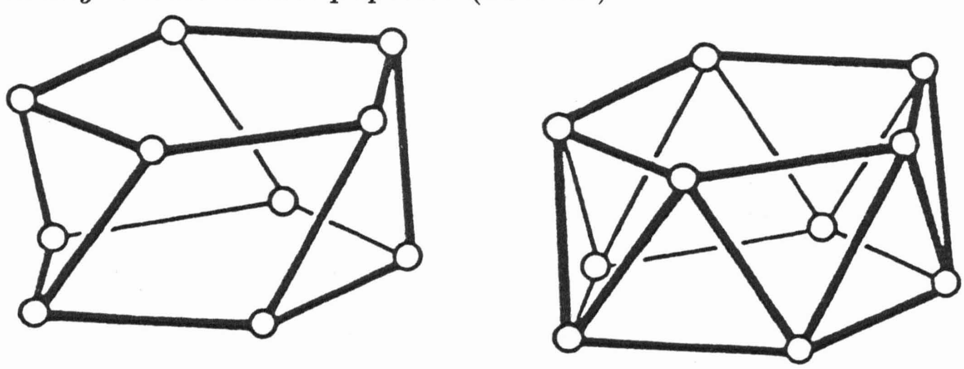
10. *Vymodelujte* **pravidelný pětiboký hranol**. *Popište jej.* (obr. 10)

(Můžeme uvažovat i o kolmém a kosém hranolu.)



Obr. 10

11. *Obdobně, jako jsme ze čtyřbokého hranolu modelovali hranolec, vymodelujte jiný hranolec pootočením horní podstavy pravidelného pětibokého hranolu o 36°. Doplňte pak potřebné další hrany a mnohostěn popište.* (obr. 11)



Obr. 11

12. *Vytvořte vhodným doplněním modelu deltastěn, popište jej.*

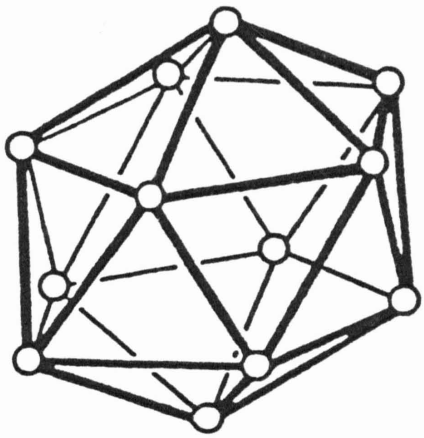
Dostali jsme **dvaceti-deltastěn**, který je **pravidelným dvacetistěnem** (obrázek v úvodu článku). Jeho povrch tvoří dvacet rovnostranných trojúhelníků, mnohostěn má 12 vrcholů a 30 hran. Všechny jeho vrcholy mají valenci 5. I tomuto mnohostěnu lze vepsat i opsat kulovou plochu (obr. 12).

13. *Lze změnit tvar a vlastnosti posledního modelu, aniž by se změnil počet stěn, vrcholů a hran?*

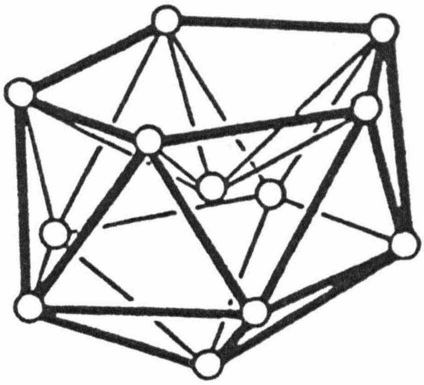
(Můžeme to udělat tak, že jeden vrchol dvacetistěnu i s hranami „vmáčkneme dovnitř“ – JOVI vydrží i tento pohyb, stále je to model dvacetistěnu.) (obr. 13)

Jak terminologicky rozlišíme obě tělesa?

Původní dvacetistěn byl **konvexní**, nyní jsme vytvořili **nekonvexní dvacetistěn**.



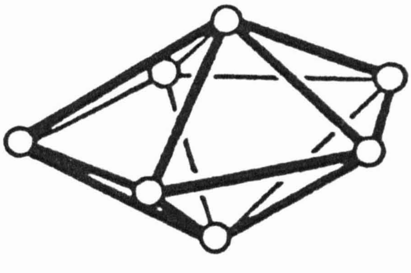
Obr. 12



Obr. 13

14. *Demontujte dvacetistěn tak, abyste co nejjednodušším způsobem získali nový deltastěn.*

Můžeme takto vymodelovat **delta-desetistěn**, neboli pětiboký dvojjehlan (obr. 14).



Obr. 14

Tímto způsobem můžeme seznámit žáky s konvexními i nekonvexními mnohostěny a zavést pojem **deltastěn.**

Vymodelovali jsme celkem 5 konvexních deltastěnů.

Freudenthal a van der Waerden dokázali (teprve v roce 1947), že konvexních deltastěnů je právě osm. V příloze časopisu najdete papírové modely celé této skupiny. Po slepení můžete obdivovat jejich jednoduchou krásu.

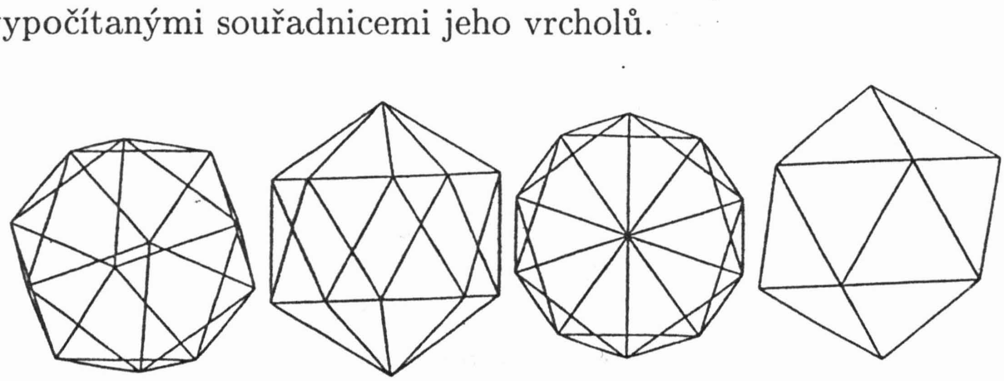
Nyní se můžeme pokusit formulovat definici pravidelného mnohostěnu neboli platónského tělesa. **Pravidelný mnohostěn je konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné n-úhelníky a v jeho každém vrcholu se stýká stejný počet stěn.**

Vymodelovali jsme čtyři taková tělesa. Byly to: pravidelný čtyřstěn — **tetraedr**, krychle – **hexaedr**, pravidelný osmistěn – **oktaedr**, pravidelný dvacetistěn – **ikosaedr**.

Zbývá ještě pátý pravidelný mnohostěn – pravidelný dvanáctistěn – **dodekaedr** (jeho povrch tvoří dvanáct pravidelných pětiúhelníků).

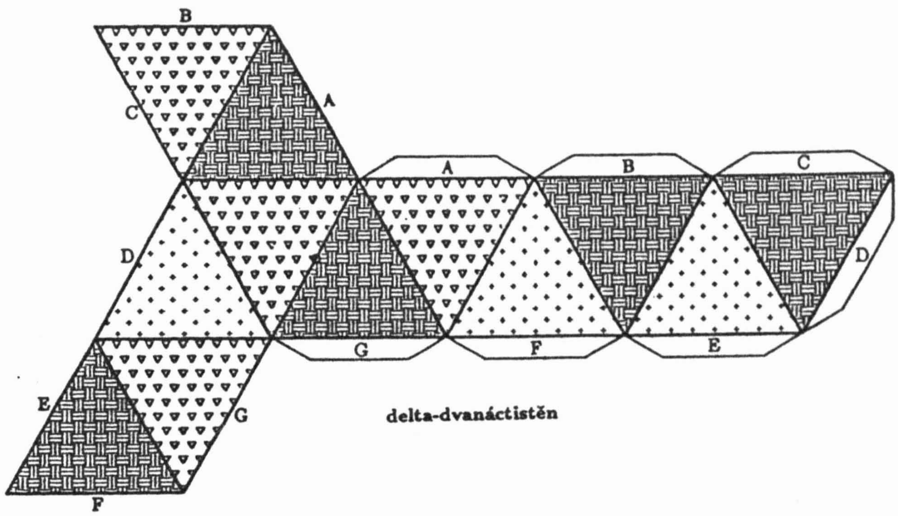
Věřím, že i hranový model dodekaedru bude alespoň na krátkou chvíli zdobit Váš kabinet.

Dnešní doba upřednostňuje jiný způsob modelování mnohostěnů. Pokud tedy dáváte přednost **modelování na počítači**, nechte se inspirovat seriálem pohledů na **drátový model pravidelného dvacetistěnu**. Při modelování jsme těleso zadávali vypočítanými souřadnicemi jeho vrcholů.



Také klasické **konstrukce papírových modelů** mohou být vhodné pro samostatnou práci.

Při řešení úkolu je třeba sestrojit správně síť tělesa, doplnit minimální počet záložek potřebných pro slepení modelu a při výtvarném dokončení modelu můžeme požadovat, aby byl mnohostěn tzv. pravidelně vybarven, tedy aby se podél žádné hrany nesetkaly dvě stejné barvy a aby počet barev byl minimální.



delta-dvanáctistěn

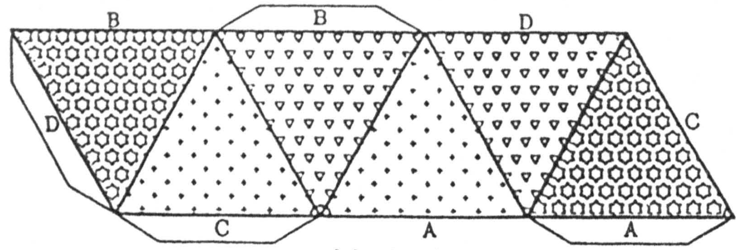
Návod na sestavení papírových modelů:

Všechny modely po obvodu vystřihneme, písmenka u hran ponecháme v malém trojúhelníčku. Vyznačené hrany tupou hranou nůžek narýhujeme a ohneme. Postupně potíráme lepidlem záložky a podle označení přilepujeme hrany (odstřihujeme písmenka). Před posledním slepením provlékneme vyznačeným místem nit s uzlem, aby bylo možné tělesa zavěsit a uchránit je tak před deformacemi.

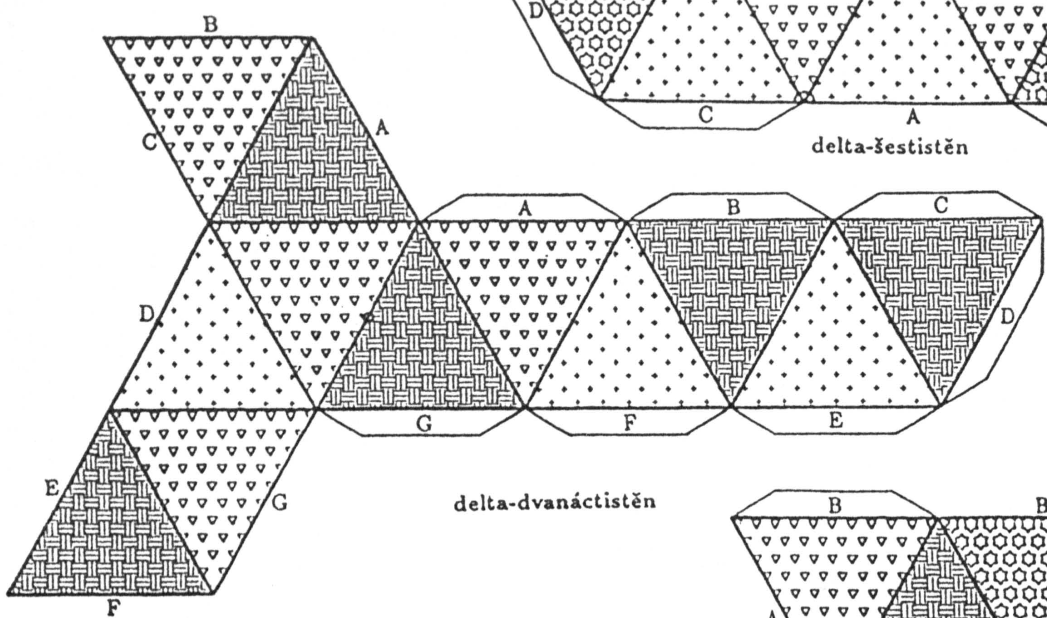
Závěrem bych chtěla upozornit, že řadu geometrických činností s tělesy jsem popsala v časopise *ABC mladých techniků a přírodovědců.* I tam mohou vaši žáci získat podněty pro zajímavou a užitečnost činnost.

LITERATURA:

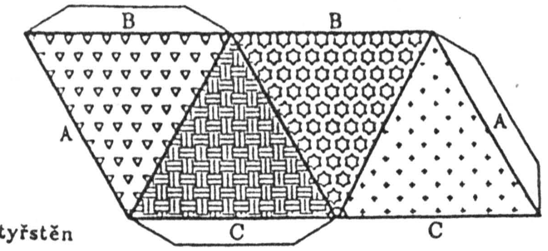
[1] H. M. Cundy, A. P. Rollett, *Mathematical Models*, Press, Oxford University, 1961.



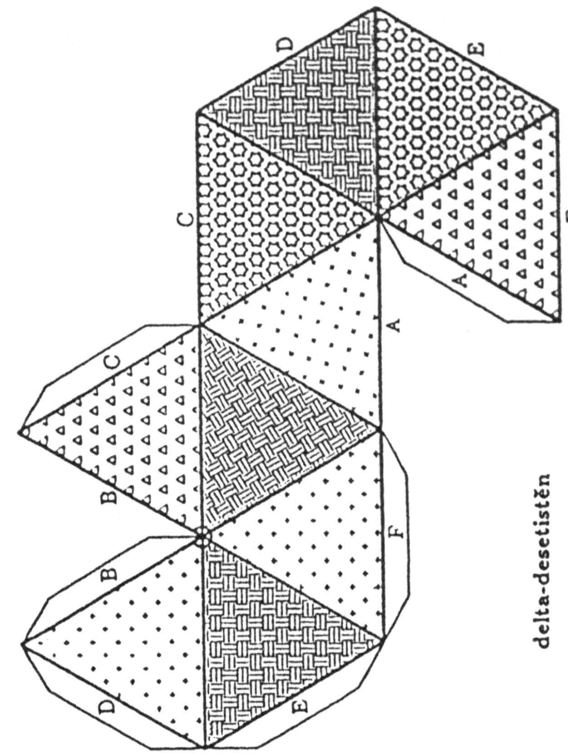
delta-šestistěn



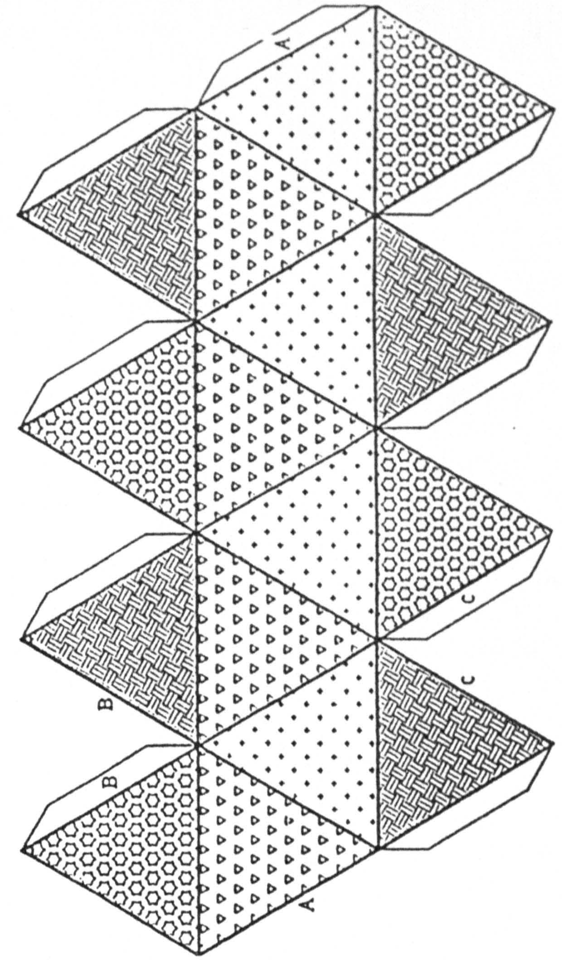
delta-dvanáctistěn



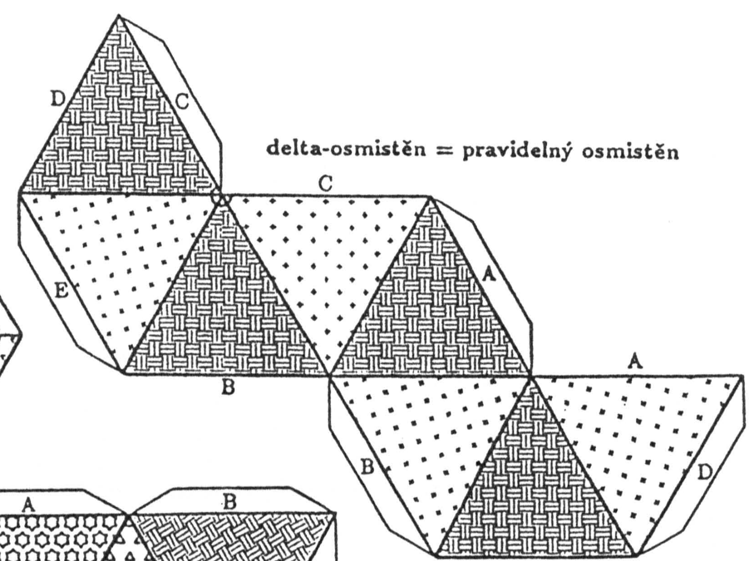
delta-čtyřstěn = pravidelný čtyřstěn



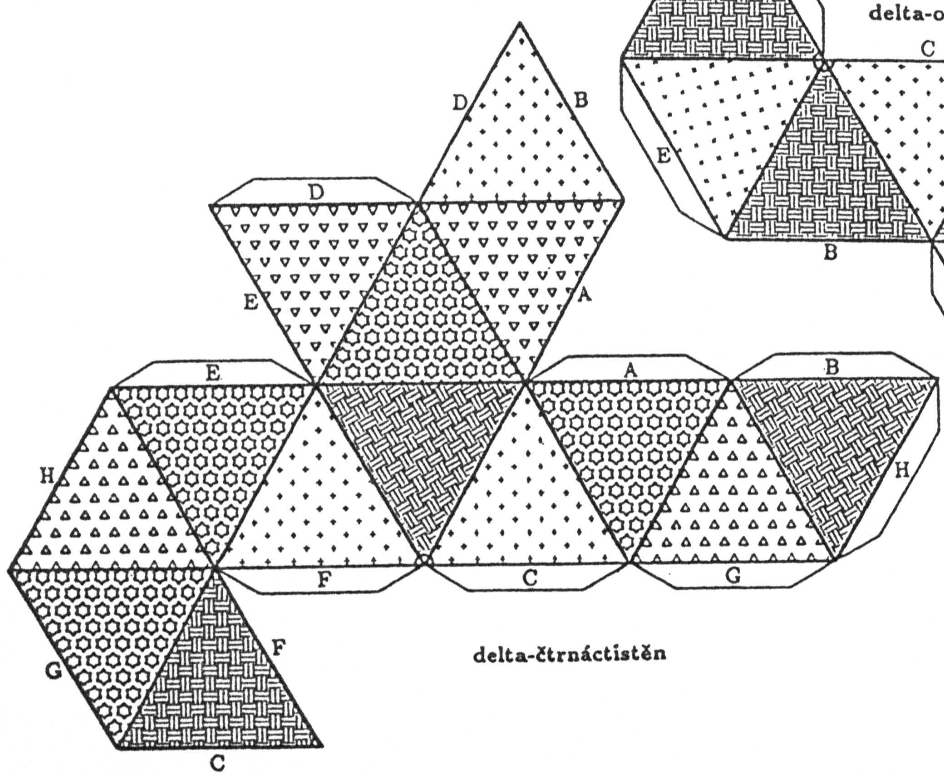
delta-desetistěn



delta-šestnáctistěn



delta-osmistěn = pravidelný osmistěn



delta-čtrnáctistěn

delta-dvacetistěn = pravidelný dvacetistěn