Renata Sikorová

Číslo e a jeho vlastnosti (Dokončení z minulého čísla)

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 2, 98–103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150882`

ČÍSLO e A JEHO VLASTNOSTI

(Dokončení z minulého čísla)

RENATA SIKOROVÁ

Až do této chvíle jsme se zabývali nalezením a definicí čísla e. Stojí za to ještě poznamenat, že vyjádření čísla e je možno provést i pomocí jiného nekonečného procesu, jmenovitě pomocí řetězových zlomků; viz např. [Eu]. Pro ilustraci je zde uvedeme (ovšem bez důkazu):

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}}$$

Nyní nastal čas, abychom se seznámili s vlastnostmi čísla e a především si ukázali jeho důležité postavení v matematice. Kdybychom chtěli porovnat číslo e se stejně „magickým" číslem π, zjistíme, že zatímco historie čísla π sahá až do starověku, historie e překlenula teprve asi čtyři století. Číslo π vzniklo v souvislosti s problémem v geometrii: jak najít obvod a obsah kruhu. Původ e je méně *jasný* : sahá snad do šestnáctého století, kdy bylo zpozorováno, že výraz $(1 + 1/n)^n$ objevující se ve vztahu pro složené úrokování se pro rostoucí n blíží k určité limitě – kolem 2.71828. Jeho první definice se však objevuje až v 18. století; je spojována se jménem LEONHARDA EULERA (1707 – 1783), a to v souvislosti se zaváděním exponenciální a logaritmické funkce. Euler dospěl k vyjádření e pomocí nekonečné řady

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots.$$

Velmi důležitý krok přišel se vznikem diferenciálního počtu, kdy se ukázalo, že exponenciální funkce, později označená jako

e^x, je rovna své vlastní derivaci. Toto ihned dalo číslu e a funkci e^x ústřední postavení v analýze.

S problémem derivace e^x úzce souvisí jedna zajímavá vlastnost čísla e. Zformulujeme ji v následující větě:

Věta 3. *Číslo e je jediným takovým kladným reálným číslem, které splňuje vztah (s neznámou a a parametrem x)*

$$a^x \geq 1 + x$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkazem věty se v tomto článku nebudeme zabývat, je totiž poněkud těžšího rázu, vyžaduje jisté znalosti z diferenciálního počtu a pracuje s pojmem obecné mocniny. Pro nás jsou však důležité důsledky, které lze z této vlastnosti čísla e odvodit. První z nich je vyjádření exponenciální funkce jako limity posloupnosti

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Toto vyjádření se někdy považuje za definici e^x a jeho objev, jak již bylo výše uvedeno, je připisován Leonhardu Eulerovi.[17] Poznamenejme ještě, že od Eulera pochází také vyjádření e^x pomocí nekonečného součtu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Pomocí tohoto součtu lze definovat exponenciálu i v komplexním oboru.

Dalším důsledkem je možnost vyčíslit důležitou limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

[17] Euler pracoval s nekonečně malými a nekonečně velkými veličinami. Pomocí tohoto nástroje dospěl k vyjádření $e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ (N značí nekonečně velké číslo); viz např. [Ve], [Ed].

z níž už přímo vyplývá výše zmíněná vlastnost exponenciální funkce, tj. že funkce e^x je rovna své vlastní derivaci:

$$(e^x)' = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{n\to\infty} e^x . \frac{e^h - 1}{h} = e^x .$$

V souvislosti s komplexním pojetím exponenciály si ještě jednou připomeňme Eulerovo jméno. Euler byl velkým experimentálním matematikem. Hrál si s matematickými vztahy a rovnicemi tak dlouho, až nalezl něco zajímavého. Kolem roku 1750 jej napadla myšlenka nahradit v nekonečné řadě pro e^x proměnnou x imaginárním výrazem ix, kde $i = \sqrt{-1}$:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots .$$

Učinil tak, aniž měl k dispozici matematický aparát, který by mu potvrdil, že jeho dosazení bylo korektní.

Celočíselné mocniny i se periodicky opakují (vždy 4 členy): $i = i^5 = \dots = \sqrt{-1}$, $i^2 = i^6 = \dots = -1$, atd. Proto mohl napsat

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots . \tag{7}$$

Nyní se Euler dopustil dalšího přestupku: sečetl řadu (7) tak, že oddělil reálné členy od imaginárních (nedokázal však, že je to korektní úprava). Tak obdržel vyjádření

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right).$$

Co už však v tomto období bylo známo, byl fakt, že výrazy v závorkách představují mocninné řady trigonometrických funkcí pro $\cos x$ a $\sin x$. Tak Euler dospěl k proslulé rovnici

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{8}$$

která spojuje exponenciální funkci s trigonometrií. Jelikož platí $\cos(-x) = \cos x$ a $\sin(-x) = \sin x$, můžeme dále psát

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{9}$$

Z rovnic (8) a (9) získáme vyjádření známá jako Eulerovy formule pro trigonometrické funkce:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ačkoli byla Eulerova odvození postavena na nepřesných základech, jejich správnost se později potvrdila. Důkaz byl ponechán nové generaci matematiků, k nimž patřili JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783), JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1783) a LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857).

Když nyní v rovnici (8) položíme $x = \pi$ ($\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$), obdržíme další významný poznatek

$$e^{\pi i} = -1,$$

který zapsán ve tvaru $e^{\pi i} + 1 = 0$ spojuje pět nejdůležitějších konstant v matematice.

Připuštěním imaginárních a později i komplexních hodnot x v řadě pro e^x Euler vlastně připravil cestu pro teorii funkcí více proměnných.

Pro poslední část článku nám zbývá ještě jedna nezodpovězená otázka: jakým druhem čísla je číslo e?

Od doby, kdy se začala zaznamenávat historie, lidé zápasili s čísly. Nejprve to byla čísla přirozená, pak racionální, a konečně čísla iracionální, jejichž objev je připisován Pythagorovi a jeho žákům. Máme tak kompletní reálnou osu; ovšem plně vyhovující teorie reálných čísel se objevila až v druhé polovině 19. století, viz např. práce [De] RICHARDA DEDEKINDA (1831 – 1916) z roku 1872.

Od objevu iracionálních čísel uplynulo dvě a půl tisíciletí, po tuto dobu nedošlo v této oblasti k nějakému dalšímu důležitému objevu. Až kolem roku 1850 byl objeven nový druh čísel. Většina čísel, se kterými se setkáváme v elementární algebře, jsou řešeními nějaké jednoduché rovnice: přesněji polynomické rovnice s celočíselnými koeficienty. Taková čísla jsou nazývána algebraická. Je přirozené si položit otázku, zda existuje nějaké číslo, které není algebraické. Prvním, komu se podařilo takové číslo najít, byl francouzský matematik JOSEPH LIOUVILLE (1809 – 1882). Jeho důkaz existence byl velmi složitý, nicméně mu umožnil vytvořit několik příkladů takových čísel, např. číslo známé jako Liouvillovo číslo:

$$\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \dots$$

Reálná čísla, která nejsou algebraická nazýváme *transcendentní*.

V roce 1737 L. Euler dokázal iracionalitu e a e^2. Důkaz transcendence e publikoval v roce 1873 francouzský matematik CHARLESE HERMITE (1822 – 1901), který ve své práci podal zároveň racionální aproximaci pro e a e^2:

$$e \approx \frac{58\,291}{21\,444}, \quad e^2 \approx \frac{158\,452}{21\,444}.$$

Výše uvedená aproximace má desetinnou hodnotu 2,718289498, chyba je menší než 0,0003 procenta oproti přesné hodnotě.

Odpověď na naši otázku tedy zní: číslo e je iracionální a transcendentní. S důkazem iracionality e se jistě setkal každý, kdo absolvoval základní kurs analýzy. Lze jej nalézt ve většině vysokoškolských učebnic, např. [D1] nebo [Ve]. Důkaz transcendence je však těžký, viz např. [Kl].

POUŽITÁ LITERATURA

[De] R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963.

[Ed] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, New York, 1979.

[Eu] Leonhard Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, Opera Omnia, Leipzig, 1922.

[D2] Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1976.

[I1] Vojtěch Jarník, *Integrální počet I*, Academia, Praha, 1974.

[Kl] Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus erster Band*, ruský překlad, Nauka, Moskva, 1987.

[Ma] Eli Maor, *The Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

[Ru] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

[Sh] Harris S. Shultz, Bill Leonard, *Unexpected Occurrences of the Number e*, Mathematics magazine **62/4** (1989), 269-271.

[S1] Renata Sikorová, *Od úrokového počtu k číslu e*, Učitel matematiky **8** (2000), 136-141.

[S2] Renata Sikorová, *Číslo e a hyperbola*, Učitel matematiky **8** (2000), 193-202.

[Ša] Tibor Šalát, *e*, Matematické obzory **10** (1976), 43-56.

[Ve] Jiří Veselý, *Matematická analýza pro učitele*, První díl, Matfyzpress, Praha, 1997.

Mgr. Renata Sikorová

doktorandka Katedry matematické analýzy MFF UK

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

email: sikorova@karlin.mff.cuni.cz