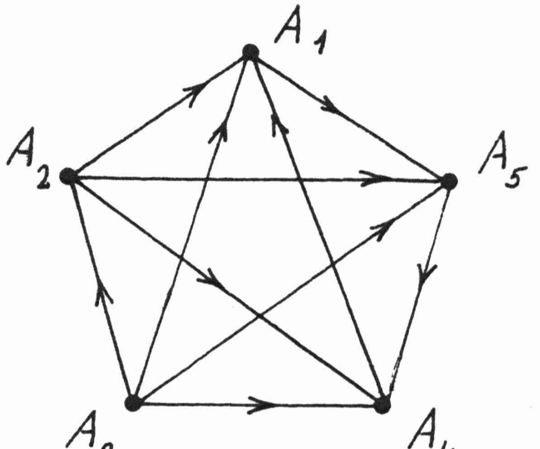
DVĚ ÚLOHY

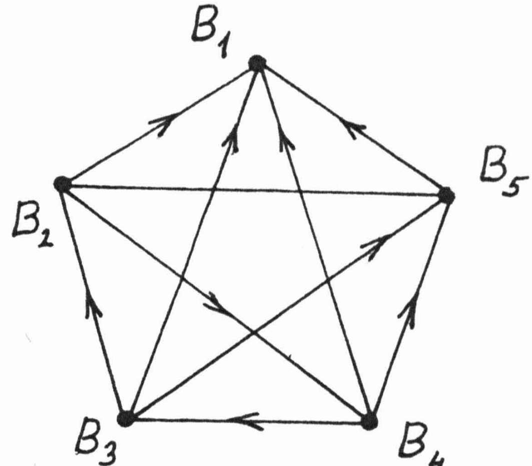
O SILNIČNÍ SÍTI VE ŠVAMBRÁNII

EMIL CALDA

Se Švambránií se někteří čtenáři už jistě setkali, třeba v učebnici *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, kde se v příkladu 1 článku 1.5 pojednává o počtu všech možných státních poznávacích značek švambránských automobilů. Na rozdíl od tohoto příkladu se v následujících řádcích budeme zabývat švambránskou silniční sítí; nepůjde samozřejmě o její technický stav, ale o matematické problémy, které jsou s ní spojeny.



Obr. 1



Obr. 2

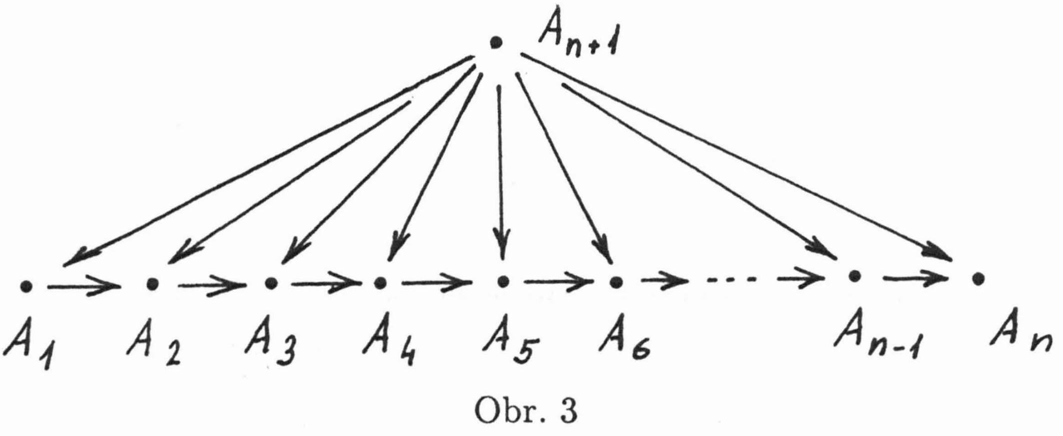
Pozoruhodnost silniční sítě tohoto státu nespočívá totiž ani tak v tom, že každá dvě švambránská města jsou spojena jedinou silnicí, jako ve faktu, že každá tato silnice je jednosměrná. Dvě takovéto sítě s malým počtem měst ($n = 5$) jsou znázorněny na obr. 1 a 2; je z nich vidět, že silniční síť tohoto typu může mít řadu nepříjemných vlastností. Tak např. automobilista nacházející se v městě A_1 na obr. 1 nemůže se svým vozem dojet do města A_2 ani A_3 a motorista bydlící v městě B_1 na obr. 2 nemůže z tohoto města dokonce vůbec vyjet! Zdánlivě lépe jsou na tom majitelé aut sídlící v městě A_3 na obr. 1: mohou sice ze svého města dojet do každého ze zbývajících, ale ze žádného se nemohou vrátit zpátky! Různé podobné „pozoruhodnosti“ se dají najít v každé silniční síti tohoto typu, ale nás budou zajímat jen ty, které jsou společné všem.

Ukážeme nejprve, že v každé švambránské silniční síti alespoň se dvěma městy existuje aspoň jedno město, které je výchozím bodem trasy, na níž každé ze zbývajících měst leží právě jednou. (Čtenář se může přesvědčit, že v síti na obr. 1 existuje takovéto město jediné – je to město A_3 a příslušná trasa, kterou lze navštívit všechna města zbývající, je buď $A_3 - A_2 - A_5 - A_4 - A_1$ nebo $A_3 - A_2 - A_1 - A_5 - A_4$; v síti na obr. 2 mají uvedenou vlastnost města B_2, B_3 a B_4.) Toto tvrzení dokážeme indukcí podle počtu měst.

Je zcela evidentní, že pro dvě města tato věta platí. Budeme proto předpokládat, že platí pro libovolný počet $n \geq 2$; výchozí město označíme A_1 a nechť $A_1 - A_2 - A_3 \cdots - A_n$ je trasa, kterou lze (v tomto pořadí) všechna města navštívit. Připojme k těmto městům další město A_{n+1} a rozlišme obě možnosti, které pro silniční síť s těmito $n+1$ městy mohou nastat:

1. Silnice spojující město A_k s městem A_{n+1} je pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$ jednosměrná ve směru od A_{n+1} do A_k.

2. Silnice spojující město A_k s městem A_{n+1} je aspoň pro jedno $k = 1, 2, \ldots, n$ jednosměrná ve směru od A_k do A_{n+1}.



Obr. 3

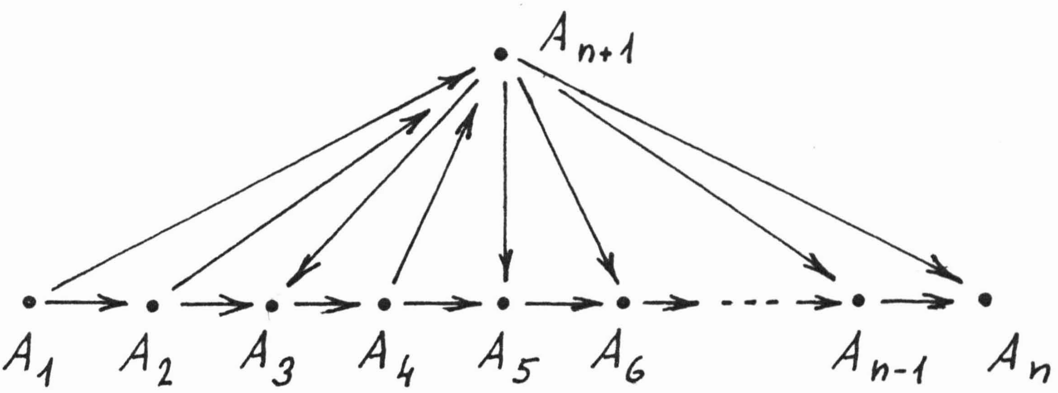
Máme dokázat, že v obou těchto případech existuje mezi městy $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ aspoň jedno, které je výchozím bodem trasy, na níž každé ze zbývajících měst navštívíme právě jednou. Z obr. 3, který ilustruje první z obou možností, je zřejmé, že hledaným městem je město A_{n+1} a že příslušná trasa je

$$A_{n+1} - A_1 - A_2 - \cdots - A_n \, .$$

Ve druhém případě ze všech měst $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pro něž je silnice vedoucí do A_{n+1} jednosměrná ve směru do A_{n+1} (aspoň jedno takové město existuje podle předpokladu), vybereme takové město A_k, že silnice spojující každé z měst $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ s městem A_{n+1} je jednosměrná ve směru od A_{n+1}; na obr. 4 je tato situace znázorněna pro $k = 4$. Hledaným městem je v tomto případě město A_1 a příslušná trasa je

$$A_1 - A_2 - \cdots - A_k - A_{n+1} - A_{k+1} - A_{k+2} - \cdots - A_n \, .$$

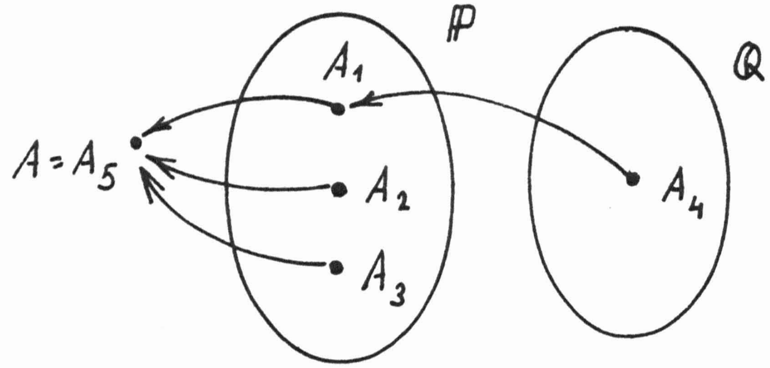
Tím je tvrzení o švambránské silniční síti dokázáno.



Obr. 4

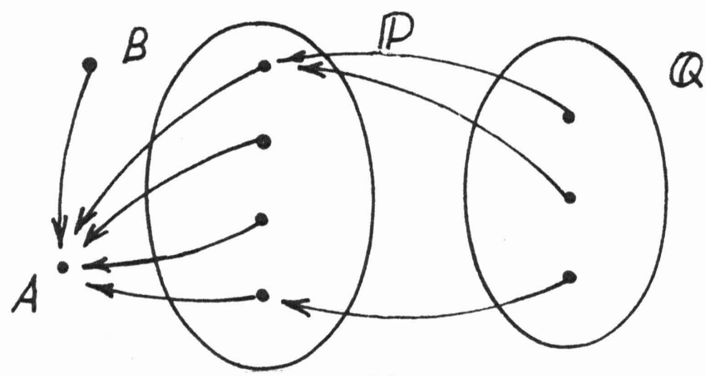
Dokážeme ještě jednu vlastnost, která je společná těmto silničním sítím s libovolným počtem měst: V každé švambránské silniční síti alespoň se dvěma městy existuje aspoň jedno město, do kterého lze dojet z každého zbývajícího města přímo nebo přes nejvýše jedno další město. (Čtenář se může přesvědčit, že v silniční síti na obr. 1 mají tuto vlastnost města A_1, A_4 a A_5, zatímco v síti na obr. 2 pouze město B_1.) K důkazu tohoto tvrzení použijeme opět matematickou indukci.

Protože pro dvě města věta zcela zřejmě platí, budeme předpokládat, že platí i pro libovolné $n \geq 2$; město, které lze daným způsobem dosáhnout z každého ze zbývajících $n-1$ měst, označíme A. Utvoříme dále množiny P a Q takto: množina P je množina všech měst, ze kterých se do města A dá dojet přímo, množina Q je množina měst, z nichž se do města A přímo dojet nedá; z každého města množiny Q se tedy dá dojet do města A jedině oklikou přes nějaké město z množiny P. (Na obr. 5 jsou tyto množiny znázorněny pro síť z obr. 1 a za město A je zvoleno město A_5.) Připojme

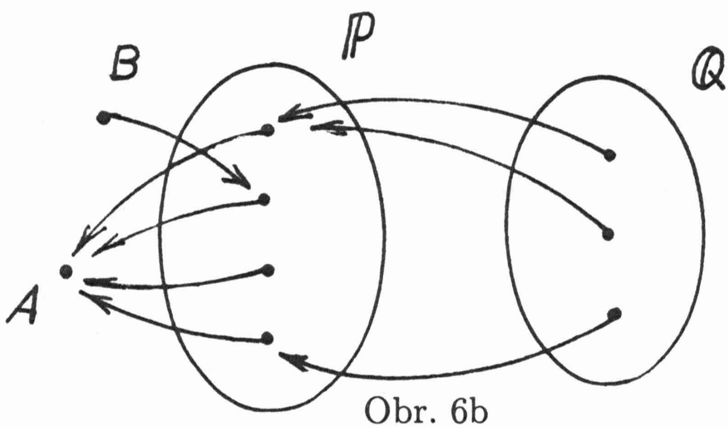


Obr. 5

nyní k těmto n městům, které jsou rozděleny do tří disjunktních množin $\{A\}$, P, Q, další město B a uvažme obě možnosti, které pro silniční síť s těmito $n+1$ městy mohou nastat:



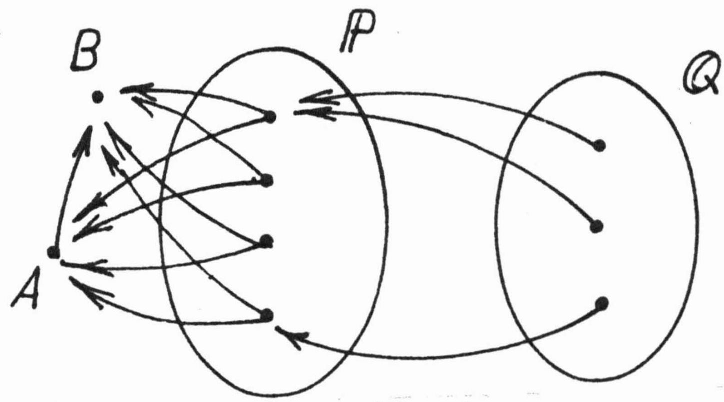
Obr. 6a



Obr. 6b

1. Z města B existuje přímé spojení do A (viz obr. 6a) nebo do nějakého města z množiny P (viz obr. 6b). To však znamená, že z města B lze do města A dojet přímo nebo oklikou přes právě jedno město; odtud plyne, že městem, do kterého lze dojet ze všech zbývajících n měst přímo nebo oklikou přes právě jedno jiné město, je původní město A.

2. Z města B do města A ani do žádného města množiny P přímé spojení neexistuje, takže z města A i z každého města množiny P existuje přímé spojení do B (viz obr. 6c). A protože také z každého města množiny Q lze dojet do města B přes nějaké město množiny P, je hledaným městem dané vlastnosti město B. Tím je i druhé tvrzení o švambránské silniční síti dokázáno.



Obr. 6c

Na závěr si dovoluji vyjádřit naději, že uvedené úlohy rozšíří spektrum příkladů, kterými jsou středoškoláci vzděláváni v technice důkazu matematickou indukcí.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
email: calda@karlin.mff.cuni.cz