Učitel matematiky

Dag Hrubý

Zajímavé rovnice

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 4, 251–253

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150864

ZAJÍMAVÉ ROVNICE

DAG HRUBÝ

Impulzem k napsání tohoto článku byla rovnice

$$2^x(6-x)=8x, \tag{1}$$

na kterou mne upozornila dr. Eva Lesáková z vydavatelství Prometheus. Rovnice (1) je zajímavá tím, že má kořeny $x_1=2, x_2=$ $=3, x_3=4$, jak se můžeme snadno přesvědčit. Takový typ rovnic se zpravidla ve výuce matematiky na gymnáziu nevyskytuje, což je pochopitelné, protože řešení rovnic typu $f(x)=g(x)$, kde f je funkce transcendentní a g je funkce algebraická, přesahuje rámec běžné výuky. To ale neznamená, že nemůžeme vést diskuzi se studenty o kořenech rovnic jako jsou např.

$$\sin x - \frac{1}{x} = 0 \tag{2}$$

$$x + e^x = 0 \tag{3}$$

Pokud studenti znají grafy funkcí $y=\sin x, y=\frac{1}{x}$, resp. $y=$ $=x, y=e^x$, můžeme se o kořenech těchto rovnic se studenty pěkně pobavit. V případě, že studenti budou mít představu o vlastnostech spojitých funkcí v uzavřeném intervalu, lze se o kořenech vyjádřit ještě podrobněji.

Vraťme se ale k rovnici (1). Pokud ji zadáme studentům, tak se možná zeptají, jak se má taková rovnice řešit. Na takovou otázku lze vždy odpovědět, že rovnici lze řešit numericky nebo graficky. V případě numerického řešení asi brzy skončíme u metody, kterou můžeme nazvat MHK (metoda hádání kořenů). Na této metodě není nic špatného. Zpravidla zkoušíme dosazovat malá celá čísla, pokoušíme se o nějaké odhady, popř. využijeme poznatků z elementární teorie čísel, dělitelnosti, rozkladu na prvočinitele atd.

Jsem přesvědčen, že Vaši studenti rovnici (1) určitě vyřeší. Dovedu si ale představit kolegy, kteří by chtěli pojmout problém obecněji. Redakce našeho časopisu případné příspěvky z této oblasti přivítá. Ukážeme si nyní, jak lze rovnice typu (1) „vyrábět".

Příklad 1. Je dána rovnice

$$2^x = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{4}$$

Určete a, b, c, d tak, aby rovnice měla kořeny $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

Řešení: Za x postupně dosadíme 2, 3, 4 o dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 4(2c+d) &= 2a+b \\ 8(3c+d) &= 2a+b \\ 16(4c+d) &= 2a+b \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, které lze zapsat např. ve tvaru $(a; b; c; d) = (-8t; 0; t; -6t)$. Z podmínky $ad \neq bc$ plyne $t \neq 0$. Vzhledem k tomu, že neznámé a, b, c, d jsou vázány vztahem (4), dostáváme

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-8tx}{tx-6t} = \frac{8x}{6-x} \tag{5}$$

Z nekonečně mnoha čtveřic $(a; b; c; d)$ zvolíme čtveřici $(8; 0; -1; 6)$. Po dosazení do (4) dostáváme rovnici

$$2^x = \frac{8x}{6-x},$$

která má požadované kořeny $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

Podívejme se nyní krátce na grafické řešení. Grafem funkce $f\colon y = 2^x$ je exponenciela a grafem funkce $g\colon y = \frac{8x}{6-x}$ je rovnoosá hyperbola. Snad je zřejmé, že počet kořenů rovnice (1) je dán počtem průsečíků obou křivek. My už v tuto chvíli víme, že graf funkce f protíná graf funkce g aspoň ve třech bodech. Zkuste si příslušné grafy načrtnout. Pravděpodobně zjistíte, že to není zcela triviální záležitost. V intervalu $\langle 2; 4\rangle$ se grafy obou funkcí moc neliší, tak nějak se „objímají". Pomoci vám mohou následující nerovnosti: $\forall x \in (-\infty; 2)$: $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (2; 3)$: $f(x) < g(x)$, $\forall x \in (3; 4)$: $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (4; 6)$: $f(x) < g(x)$.

Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $2^x > 0$, musí být také $\frac{8x}{6-x} > 0$. To ale znamená, že $x \in (0; 6)$. Řešení rovnice (1) proto hledáme v intervalu $(0; 6)$.

Příklad 2. Je dána rovnice

$$2^x = ax^2 + bx + c \tag{6}$$

Určete a, b, c, d tak, aby rovnice měla kořeny $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.

Řešení: Za x postupně dosadíme 2, 3, 4 a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 4 &= 4a + 2b + c \\ 8 &= 9a + 3b + c \\ 16 &= 16a + 4b + c \end{aligned}$$

Soustava má právě jedno řešení $(a; b; c) = (2; -6; 8)$. Po dosazení do (6) dostáváme rovnici

$$2^x = 2x^2 - 6x + 8 \tag{7}$$

Nyní si opět můžeme pohrát s grafy obou funkcí. Zejména v intervalu $(0; 5)$ to bude zajímavé. Na závěr si jako domácí cvičení můžete vyřešit následující úlohu.

Příklad 3. Je dána rovnice

$$2^x = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{8}$$

Určete a, b, c, d tak, aby rovnice měla kořeny $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz