Učitel matematiky

Veronika Svobodová
Pravidelné mnohostěny z dvojího pohledu

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 3, 152–164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150852

PRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY
Z DVOJÍHO POHLEDU

(Veroniky Svobodové a historie matematiky)

Veronika Svobodová

V poezii je zapotřebí inspirace stejně jako v geometrii.
(A. S. Puškin)

Když jsem poprvé vzala do ruky knihu *Geometrická rapsódie* od Karla Levitina, byla jsem jako očarovaná a následující dny a noci jsem strávila nad lepením pravidelných a hvězdicových mnohostěnů, nad zašíváním díry Möbiovým proužkem či nad zkoumáním úžasných grafik M. C. Eschera. Většina historických reálií je v mé práci převzata právě z této knihy.

Domnívám se, že pouhým obrázkem těles bych nedosáhla správného cíle. Proto obzvláště u složitějších mnohostěnů budu meditovat nad jejich vznikem a podám také návod na jejich konstrukci.

Mezi pravidelnými tělesy je na prvním místě jako počátek a matka ostatních krychle a, dovolíte-li, její manžel osmistěn, neboť osmistěn má právě tolik vrcholů, kolik má krychle stěn, a středy stěn krychle jsou vrcholy osmistěnu.

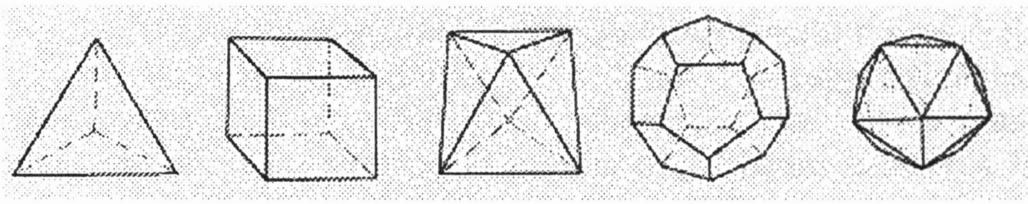
(J. Kepler)

*   *   *

Úvodem něco ryze matematického (čtoucí nematematik nechť se neleká, celé povídání bude průzračně čisté a pochopitelné):

Definice. **Pravidelným mnohostěnem** (nebo též **platónským tělesem**) rozumíme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém vrcholu se jich stýká stejný počet.

První zmínku o pravidelných mnohostěnech nacházíme u Platóna (427-347 př. Kr.). Domníval se, že atomy čtyř živlů, z nichž je složen svět — atomy ohně, země, vzduchu a vody, mají tvar pravidelných konvexních mnohostěnů — čtyřstěnu, krychle, osmistěnu a dvacetistěnu a svět jako celek má tvar dvanáctistěnu (Obr. 1).



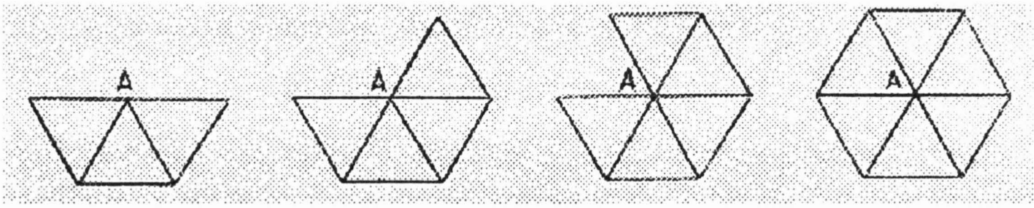
Obr. 1

A nyní hlavní otázka: proč je platónských těles právě pět? Neexistuje ještě nějaké? První mé zamyšlení je přímočaré, dítětem lehce odvoditelné, nicméně ne zcela korektní (matematik nechť se nepohorší, v dalším bude uvedeno matematicky formálně správné odvození).

Z definice víme, že stěny platónského tělesa musí být pravidelné mnohoúhelníky. Dále je zřejmé, že v každém vrcholu mnohostěnu se musí sbíhat alespoň tři stěny. Zkusme tedy konstruovat možné pravidelné mnohostěny z konkrétních pravidelných mnohoúhelníků.

Vezměme *pravidelný trojúhelník*. V jednom vrcholu mnohostěnu se může sbíhat maximálně pět těchto mnohoúhelníků, neboť z šesti a více by se nám třírozměrný vrchol vůbec nepodařilo zkonstruovat (Obr. 2d). Varianta (a) u téhož obrázku nás dovede na pravidelný **čtyřstěn**, (b) na pravidelný **osmistěn** a (c) na pravidelný **dvacetistěn**.

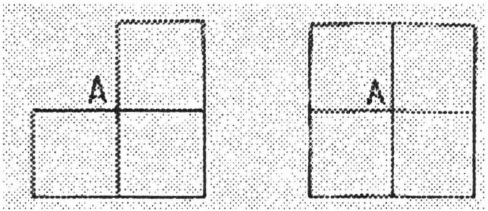
Pro *čtverec* analogicky zjistíme přípustné vrcholové konfigurace (Obr. 3). Varianta (a) vede na pravidelný **šestistěn**, (b) a další nemá smysl uvažovat. U *pravidelného pětiúhelníka* dostáváme pravidelný **dvanáctistěn** (Obr. 4). Uvažovat čtyři a více pětiúhelníků stýkajících se v jednom vrcholu nemá smysl, vždyť



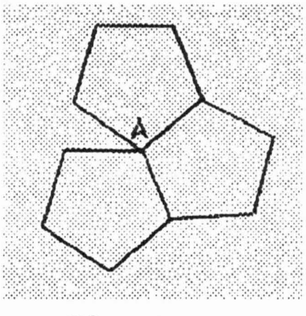
a) b) c) d)

Obr. 2

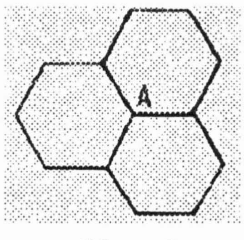
už i čtverec s příznivějšími vnitřními úhly možnost se čtyřmi mnohoúhelníky vylučuje (Obr. 3b). Tři šestiúhelníky sbíhající se v jednom vrcholu v síti pokrývají celých 360^o (Obr. 5), proto z nich, ani z dalších pravidelných mnohoúhelníků již nelze zkonstruovat pravidelný mnohostěn.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Tímto hravým způsobem jsme si ukázali, že platónských těles je nejvýše pět. Pokusme se nyní provést regulérní důkaz existence pěti platónských těles. Nejprve si zavedeme označení:

H	počet hran
V	počet vrcholů
S	počet stěn
p	počet stran pravidelného mnohoúhelníka
q	počet hran vycházejících z jednoho vrcholu

Dvojice (p, q) se nazývá **Schläfliho symbol.**

K důkazu budeme potřebovat tři tvrzení.

První z nich říká, že počet hran, které tvoří kostru platónského tělesa, je roven polovině počtu vrcholů násobeného počtem hran vycházejících z jednoho vrcholu. To je zřejmé, neboť každou hranu při tomto počítání bereme dvakrát (hrana určuje dva vrcholy a byla tedy dvakrát započítaná). Dostáváme tedy vztah

$$2 \cdot H = V \cdot q. \tag{1}$$

Druhé tvrzení říká, že počet hran, které tvoří kostru platónského tělesa, je roven polovině počtu stěn násobené počtem stran příslušného pravidelného mnohoúhelníka. To jest opět zřejmé, neboť i tímto způsobem počítáme každou hranu dvakrát (vždyť hrana určuje dva mnohoúhelníky). Dostáváme vztah

$$2 \cdot H = S \cdot p. \tag{2}$$

Posledním tvrzením potřebným k důkazu existence pěti platónských těles je známý Eulerův vzorec

$$S + V = H + 2. \tag{3}$$

K ověření jeho platnosti budeme potřebovat některé pojmy z teorie konečných grafů.

Definice. Uspořádanou dvojici (U, H), kde U je konečná neprázdná množina a H nějaký systém jejích dvouprvkových podmnožin, nazveme **grafem.** U značí uzly grafu, H jeho hrany. Řekneme, že graf (U, H) je **souvislý**, jestliže každé dva vrcholy lze spojit řetězcem hran. Řekneme, že souvislý graf (U, H) **neobsahuje kružnici**, právě tehdy když vypuštěním libovolné hrany se jeho souvislost poruší. Souvislý graf (U, H) bez kružnic nazveme **strom.** Graf (U_1, H_1) nazveme **faktorem** grafu (U, H), právě tehdy když

$U_1 = U$ a současně H_1 je podmnožinou H. Faktor, který je stromem, se nazývá **kostra**.

Bez důkazu uvádím ještě jednu elementární větu.

Věta. V každém stromu platí

$$|U| - |H| = 1. \tag{4}$$

Mnohostěn si můžeme představit jako graf (V, H). Uzly grafu budou vrcholy mnohostěnu a hrany grafu budou hranami mnohostěnu. Je zřejmé, že tento graf je souvislý, vždyť každé dva vrcholy lze spojit řetězcem hran. Vezměme nyní libovolnou kostru grafu (V, H) a označme ji T. Sestrojme nyní duální graf T' ke grafu T: v každé stěně mnohostěnu zvolme vnitřní bod, který bude v T' vrcholem. Dva vrcholy v T' spojme hranou právě tehdy, když jim odpovídající stěny v mnohostěnu mají společnou hranu, která není obsažena v T. Tvrdíme, že T' je souvislý. Kdyby existoval vrchol, k němuž se nemůžeme dostat řetězcem hran z libovolného vrcholu, znamenalo by to, že v T existuje kružnice, což je spor s tím, že T je kostra. Tvrdíme, že T' je strom. Kdyby v T' existovala kružnice k, znamenalo by to, že řez podél k rozdělí mnohostěn na dvě části (zaručeno konvexitou mnohostěnu), kde každá z nich obsahuje alespoň jeden vrchol. Což je spor s tím, že T je souvislý (kdybychom ty dvě části spojili, museli bychom protnout k, což je spor s definicí T', vždyť hrany z T a T' nesmí mít společný bod). Jistě je T' také faktor, neboť vrcholy T' jsme volili v každé ze stěn mnohostěnu. Ze vztahu (4) dostáváme aplikací na kostry T, T':

$$|U_T| - |H_T| = 1 \tag{5}$$

$$|U_{T'}| - |H_{T'}| = 1 \tag{6}$$

kde U_T je množina všech vrcholů mnohostěnu, $U_{T'}$ je množina všech stěn mnohostěnu, H_T značí některé hrany mnohostěnu a $H_{T'}$ značí všechny zbylé hrany mnohostěnu

Dosazením do řeči mnohostěnu ($U_T = V, U_{T'} = S, H_T + H_{T'} = H$) dostaneme dokazované tvrzení (3).

Nyní máme všechna tvrzení potřebná pro provedení důkazu existence pěti platónských těles:

$$2 \cdot H = V \cdot q, \tag{1}$$

$$2 \cdot H = S \cdot p, \tag{2}$$

$$S + V = H + 2. \tag{3}$$

Vezměme (3) a dosaďme do (1):

$$2 \cdot (V + S - 2) = V \cdot q,$$

$$V = \frac{4 - 2 \cdot S}{2 - q} \tag{8}$$

(q je jistě různé od 2).

Vezměme (3) a dosaďme do (2):

$$2 \cdot (V + S - 2) = S \cdot p,$$

$$V = \frac{S \cdot p - 2 \cdot S + 4}{2}. \tag{9}$$

Syntézou (8) a (9) dostaneme:

$$\frac{4 - 2 \cdot S}{2 - q} = \frac{S \cdot p - 2 \cdot S + 4}{2},$$

$$S = \frac{4q}{2p - p \cdot q + 2q}. \tag{10}$$

S a q jsou jistě kladné. Proto platí:

$$2p - p \cdot q + 2q > 0,$$

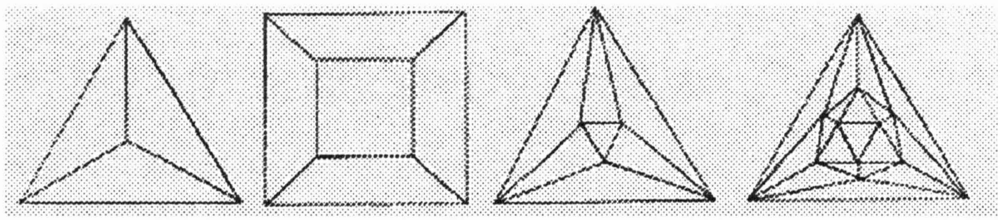
$$(p - 2) \cdot (2 - q) > -4,$$

$$(p - 2) \cdot (q - 2) < 4. \tag{11}$$

Této nerovnosti a předpokladu $p > 2$, $q > 2$, p, q jsou přirozené, vyhovují právě tato (p, q):

(3, 3) čtyřstěn,
(3, 4) osmistěn,
(4, 3) šestistěn,
(3, 5) dvacetistěn,
(5, 3) dvanáctistěn.

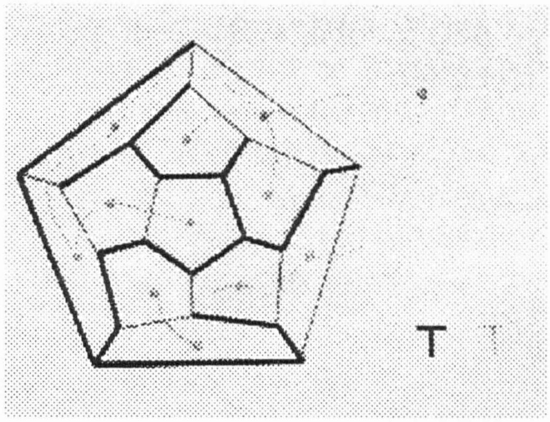
V důkazu Eulerova vzorce jsme pracovali s grafem mnohostěnu. Významný irský matematik a fyzik William Hamilton (1805-1865) nahradil prostorový dvanáctistěn jeho rovinným zobrazením — to jest grafem, který zachovává jeho strukturu, má stejný počet vrcholů a hran a ty jsou stejným způsobem pospojovány.



Obr. 6

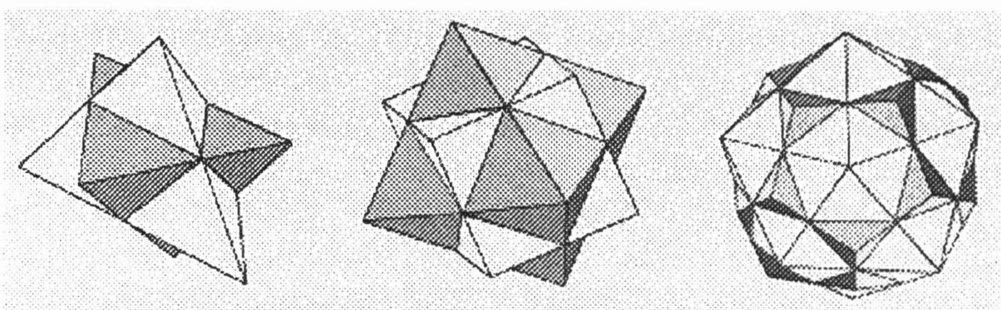
Jedna z možností, jak dostaneme z mnohostěnu jeho graf: mnohostěn promítneme do roviny jedné z jeho stěn z bodu, který zvolíme nedaleko středu této stěny. Pro pět platónských těles tak dostaneme tzv. Schlegelovy diagramy (Obr. 6). Tak by se nám jevil gigantický mnohostěn, kdybychom odstranili jednu jeho stěnu a prohlíželi si ho zevnitř. V Schlegelově diagramu dvanáctistěnu (Obr. 7) je zároveň vyznačena kostra T'. Je nutné si uvědomit, že „vnějšek“ diagramu pokládáme za stěnu, kterou „nahlížíme“.

Velmi zajímavou, nikoli však neočekávanou vlastností platónských těles je jejich symetričnost. Jsou duální v tom smyslu, že středy stěn jednoho tvoří vrcholy druhého tělesa. Tak osmistěn je duální s krychlí, dvanáctistěn s dvacetistěnem a zbylo nám jediné těleso. Má čtyři stěny a čtyři vrcholy a je tedy nasnadě, aby těleso do něj vepsané mělo také čtyři stěny a čtyři vrcholy. Jak jistě začínáte tušit, čtyřstěn je duální sám se sebou. Ostatně nápovědu dává už i symetrie Schläfliho symbolů — (4,3) a (3,4) u krychle a osmistěnu, (5,3) a (3,5) u dvanáctistěnu a dvacetistěnu a (3,3) u čtyřstěnu. Právě proto se duální mnohostěny dají do sebe krásně



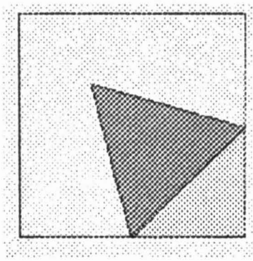
Obr. 7

vpisovat.

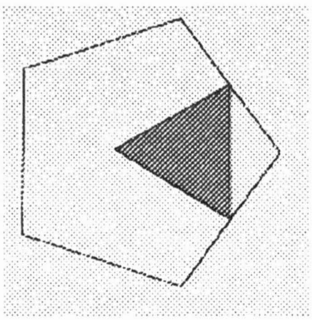


Obr. 8 a), b), c)

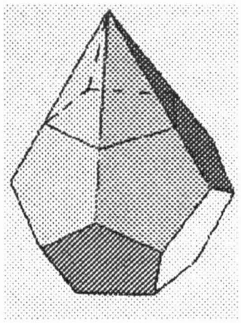
Pokud jde o konstrukce popisovaných těles v prostoru, pevně věřím, že platónská tělesa nebudou dělat problémy. „Stavební jednotky“ jejich průniků (Obr. 8) však pro jistotu zkonstruuji. U duality čtyřstěnu (Obr. 8a) bude stavební jednotkou rovnostranný trojúhelník, jehož konstrukci není třeba popisovat. Při lepení je lepší pro názornost použít dvou barev. Na konstrukci je třeba dvanáct trojúhelníků od každé barvy. Pro sestrojení duality šestistěnu s osmistěnem (Obr. 8b) budou stavebními jednotkami dva druhy trojúhelníků (Obr. 9). Světle šedé se budou slepovat po třech k sobě, tmavě šedé po čtyřech. Od každého druhu jich bude potřeba 24. Dualitu dvanáctistěnu s dvacetistěnem (Obr. 8c) slepíme opět ze dvou druhů trojúhelníků (Obr. 10). Tmavě šedé se budou slepovat po pěti k sobě, světle šedé po třech. Od každého druhu jich bude třeba 60.



Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

Vraťme se nyní znovu k naší pětici platónských těles. Když jsou tak dokonalá, musí mít přece svůj vzor v přírodě, nemohou být výplodem naší fantazie, musí pocházet od Boha. Přibližně toto si asi myslela řada matematiků i filosofů, a tak kromě zmiňovaného Platóna a jeho hypotézy o tvaru atomů živlů a světa se kupříkladu Jan Kepler (1571-1630) pokoušel využít platónská tělesa ve svém astrogeometrickém bádání. Když objevil základní zákony, jimiž se řídí pohyb planet v sluneční soustavě, položil si otázku, proč jsou planety právě v takových vzdálenostech od Slunce. A zde se projevila Keplerova náklonnost k čisté geometrii:

„Jsou-li nebeské pohyby výtvorem rozumu, mohli bychom podloženě tvrdit, že dráhy planet jsou dokonalými kruhy. Sám Bůh, který je příliš vznešený na to, aby zůstal nečinný, rozehrál hru symbolů a ukazuje světu svoji podobu. Osměluji se proto domnívat, že celá příroda i požehnané nebe jsou popsány jazykem geometrie.“

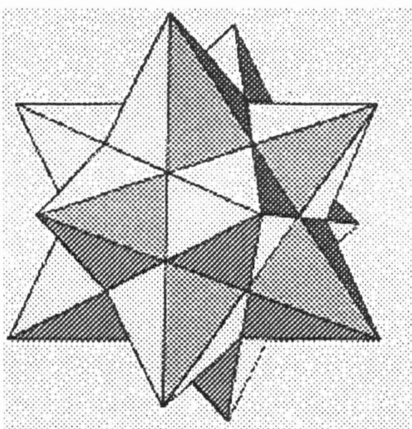
Kepler se snažil najít řád v rozložení planetárních drah a do kruhů vpisoval pravidelné mnohoúhelníky. Nenacházel však žádnou analogii s rozmístěním planet na obloze. A tu dostal nápad. Planet je právě šest (Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn) a mezer mezi nimi pět. A platónských těles je také pět! Kepler začal horečně vkládat jeden pravidelný mnohostěn do druhého, vpisoval jim koule a všelijak je kombinoval, aby našel matematický vzor planetárních drah. K jeho velké radosti se tyto konstrukce do značné míry shodovaly se situací na obloze, jak se v té době astronomům jevila. Keplerův model vypadal takto: po největší kouli se středem ve Slunci se pohybuje Saturn. Do ní je vepsána krychle a do té pak koule určující dráhu Jupitera. Když do menší koule vepíšeme čtyřstěn a do toho zase kouli, dostaneme dráhu Marsu. Analogicky mezi Marsem a Zemí je dvanáctistěn, mezi Zemí a Venuší dvacetistěn a Venuši dělí od Merkuru osmistěn. Kepler nedostal rozměry drah přesně a vysvětloval to tím, že mezi myšleným kruhem a skutečnou dráhou planety je určitý rozdíl, neboť „nebeské pohyby nejsou dílem rozumu, ale přírody". Svůj model musel proto trochu upravit — koule mají různou tloušťku.

Koncepce pravidelného vesmíru ovšem padla objevem dalších planet, neboť kolekce platónských těles se nerozhojnila. Nicméně pravidelné mnohostěny byly objeveny ve strukturách krystalů, ale též kupříkladu virů (70. léta 20. století). Viry k tomu, aby co nejefektivněji zničily hostitelskou buňku, musí najít těleso, které má při daném objemu nejmenší povrch složený ze stejných jednoduchých obrazců. Je jím dvacetistěn.

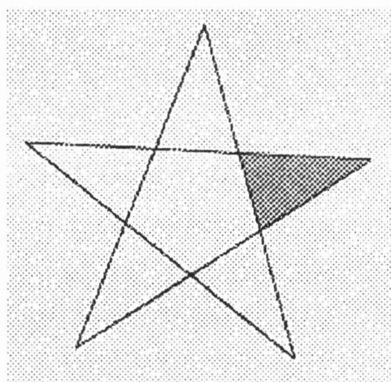
Definice. **Kepler-Poinsotovým tělesem** (nebo též **hvězdicovým mnohostěnem**) rozumíme tělesa, která dostaneme „ohvězdováním" platónských těles, to jest protažením jejich stěn až se protnou.

Z krychle a ze čtyřstěnu tak nová tělesa nevzniknou. Protáhneme-li stěny osmistěnu až se protnou, máme těleso nám už známé — jsou to dva pronikající se čtyřstěny. Jako první si ho všiml Luca Pacioli a nazval je *protažený osmistěn*. O sto let později toto těleso znovu objevil Jan Kepler a dal mu název *Stella octangula*, osmicípá hvězda (Obr. 8a).

Dvacetistěn a dvanáctistěn dávají další čtyři hvězdicové mnohostěny. Jedním z nich je *malý hvězdicový dvanáctistěn* (Obr. 12), který objevil Jan Kepler a nazval ho „ježek". Toto těleso však odmítli vědci po dlouhou dobu počítat mezi mnohostěny. Nejen kvůli tomu, že stěnami byly hvězdy a ne konvexní mnohoúhelníky, jak by se na slušné těleso patřilo. Dokonce nejen kvůli tomu, že se stěny tohoto tělesa protínaly (další neslušnost). Pádným důvodem byla neplatnost Eulerova vzorce pro „ježka“. Vždyť jeho ostny se skládají z dvanácti stěn, třiceti hran a dvanácti vrcholů! Naštěstí se však ukázalo, že „ježek“ nemá zas tak ostré ostny, aby vyvrátil nepochybně správný vzorec. Stačí na něj hledět jako na normální geometrické těleso složené z 60 trojúhelníků, 90 hran a 32 vrcholů a vše je v pořádku.



Obr. 12

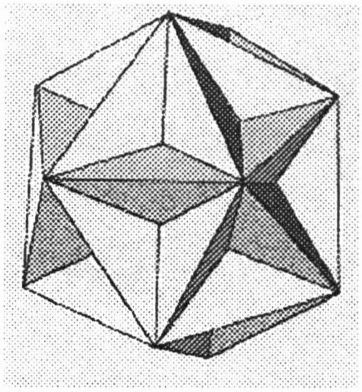


Obr. 13

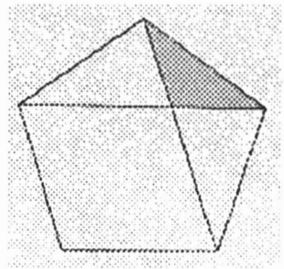
A ještě jedna geometrická zvláštnost malého hvězdicového dvanáctistěnu. Libovolná hrana dvanáctistěnu (= ořezaného „ježka“) je totiž s toutéž hranou prodlouženou až ke špičce ostnu „ježka“ v poměru zlatého řezu, v „božské proporci“. Keplera nenapadlo, že těleso, které objevil, má dvojníka. Na to přišel až A. F. Möbius (1790-1868) a tzv. *velký dvanáctistěn* (Obr. 14) sestrojil francouzský geometr Louis Poinsot (1777-1859) takřka 200 let poté, co Kepler objevil „ježka“. Obdobně *velký hvězdicový dvanáctistěn* (Obr. 16) objevil Kepler a objev druhého — *velkého dvacetistěnu* (Obr. 17) přenechal Poinsotovi.

Zamysleme se nad konstrukcí malého hvězdicového dvanáctistěnu (Obr. 12). Jedná se v podstatě o ohvězdovaný dvanáctistěn (Obr. 11). Konstrukce stavební jednotky je poměrně jednoduchá (Obr. 13). Celkem je potřeba 60 trojúhelníků a v každém ostnu hvězdy se jich stýká pět.

Na konstrukci velkého dvanáctistěnu (Obr.14) je potřeba 60 stavebních jednotek (Obr. 15).

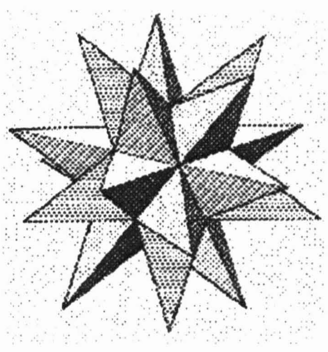


Obr. 14



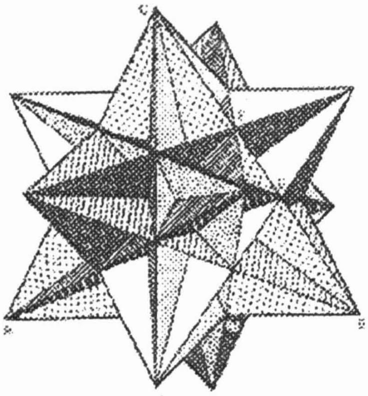
Obr. 15

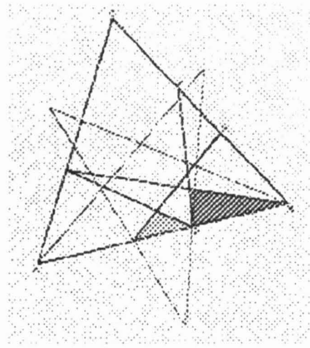
Velký hvězdicový dvanáctistěn (Obr. 16) zkonstruujeme ze stejných trojúhelníků jako malý hvězdicový dvanáctistěn, stejný bude i počet slepovaných jednotek. Rozdíl bude pouze v počtu sbíhajících se trojúhelníků v jednom ostnu. Tentokrát budou jen tři.



Obr. 16

Velký dvacetistěn (Obr. 17) je na konstrukci nejsložitější. Podkladem je pravidelná pěticípá hvězda. Pro snazší orientaci je použito stejné označení významných bodů (srov. Obr. 17 a Obr. 18). Malých trojúhelníků je potřeba 60, větších 120.


Obr. 17


Obr. 18

Za povšimnutí určitě stojí názvy zmiňovaných mnohostěnů. Malý a velký hvězdicový dvanáctistěn vzniknou protnutím dvanácti pěticípých hvězd. Velký dvanáctistěn je tvořen dvanácti protínajícími se pravidelnými pětiúhelníky a velký dvacetistěn dvaceti pravidelnými trojúhelníky.

Zkuste si také vytvořit k popisovaným hvězdám konvexní obaly. Asi vás už napadá, že jimi budou platónská tělesa.

Daleko snáze se hledá chyba, než pravda.
(J. W. Goethe)

Pokud jste dočetli až sem, doufám, že vás procházka geometrickou zahrádkou inspirovala a že jste v ní objevili nějaký exemplář, který byste chtěli mít doma. Pokud ano, nemám jednodušší rady. Stačí vzít jen lepidlo a nůžky a vzpomenout si na Platóna, Keplera a Poinsota.

Literatura

[1] Armstrong, M. A, *Basic topology*, (Undergraduate Texts in Mathematics), by Springer-Verlag New York, Inc., 1983

[2] Levitin, K, *Geometrická rapsódie*, SNTL, Praha, 1991

Veronika Svobodová
studentka Přírodovědecké fakulty MU
e-mail: borkov@math.muni.cz