

# Učitel matematiky

---

František Kuřina

Tři klasické úlohy aneb O motivaci

*Učitel matematiky*, Vol. 12 (2004), No. 4, 193–203

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150838>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

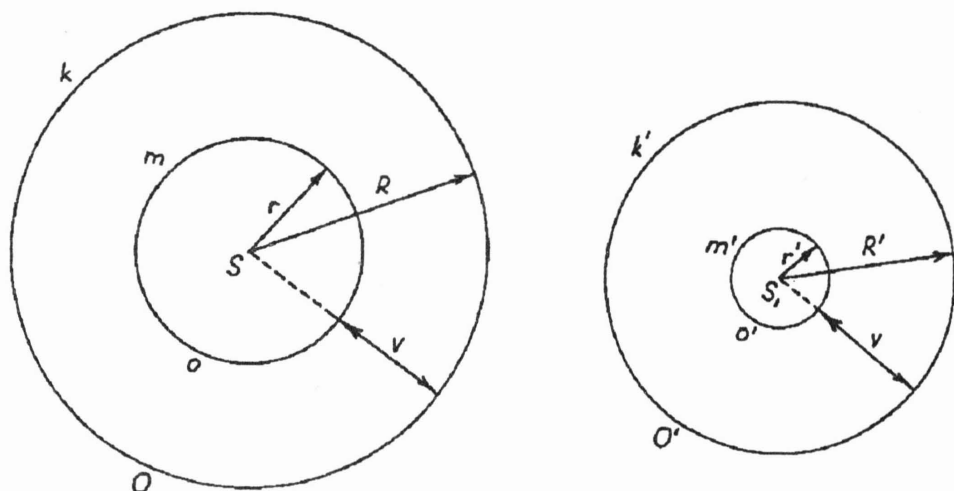
## TŘI KLASICKÉ ÚLOHY aneb O MOTIVACI

FRANTIŠEK KUŘINA<sup>1</sup>

Chápeme-li motivaci jako podnět k aktivitě, tedy motivaci k učení jako podnět ke vzdělávací aktivitě, mají jistou motivační sílu úlohy, které upoutají studenta např. svým překvapivým výsledkem. Uvedme zde tři takové úlohy známé z literatury.

### Úloha 1

Dokažte: Rozdíl délky větší a menší kružnice mezikružší je závislý jen na šířce mezikružší, ne však na poloměrech  $R$ ,  $r$  kružnic, které mezikružší ohraničují.



Obr. 1

Ačkoliv by asi každý na základě pohledu na obr. 1 odhadl, že

$$O - o > O' - o', \quad (1)$$

<sup>1</sup> Příspěvek byl připraven s podporou grantu GAČR 406/02/0829

můžeme snadno ověřit, že

$$O - o = 2\pi R - 2\pi r = 2\pi(r + v) - 2\pi r = 2\pi v = O' - o'. \quad (2)$$

Autoři úloh z rekreační matematiky ovšem s oblibou zpestřují úlohu „provokativními“ interpretacemi.

Tak např. Karel Čupr v dnes již klasické knize *Geometrické hry a zábavy* ([1], s. 43) píše:

„Zúčastněme se tohoto myšlenkového pokusu. Rovník má délku 40 000 km = 40 000 000 m; načechráme-li niť o délce 10 m větší než je rovník všude stejně vysoko nad rovníkem, vznikne jistá mezera; stačí její šířka, aby jí proklouzla myš. Šířka této mezery (mezikruží) jest

$$\frac{40\,000\,010}{2\pi} - \frac{40\,000\,000}{2\pi} = 10\,m : 2\pi = 1,6\,m,$$

tedy projde jí i prostředně velký člověk. Řešte tutéž úlohu v tom případě, že o 10 m delší niť načechráme kol hrachu, jehož poloměry jsou 3 mm. Jinou úpravu téže úlohy lze čísti u Julia Vernea: O kolik delší dráhu vykoná hlava dvoumetrového obra, obejde-li zeměkouli po rovniku.“

## Úloha 2

Dokažte: Obsah mezikruží je závislý na délce „tečné tětivy“ mezikruží, nikoliv na poloměrech  $R$ ,  $r$  kružnic, které mezikruží ohraničují. Tečnou tětivou mezikruží budeme zde rozumět tětivu větší kružnice, která se dotýká menší kružnice (obr. 2).

Tento překvapivý výsledek je zřejmý. Označíme-li délku tečné tětivy  $AB$   $2t$ , pak v pravoúhlém trojúhelníku  $ASP$  platí:

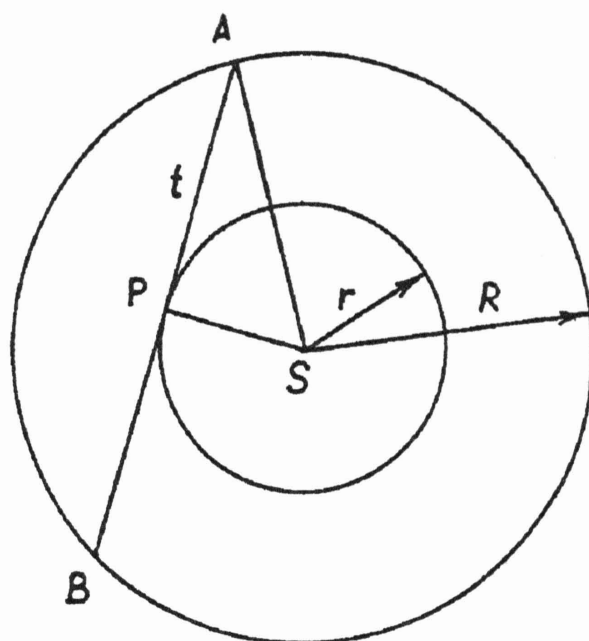
$$R^2 - r^2 = t^2. \quad (3)$$

Dosadíme-li tento výsledek do vzorce

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

pro obsah mezikruží, dostaneme

$$S = \pi t^2. \quad (4)$$



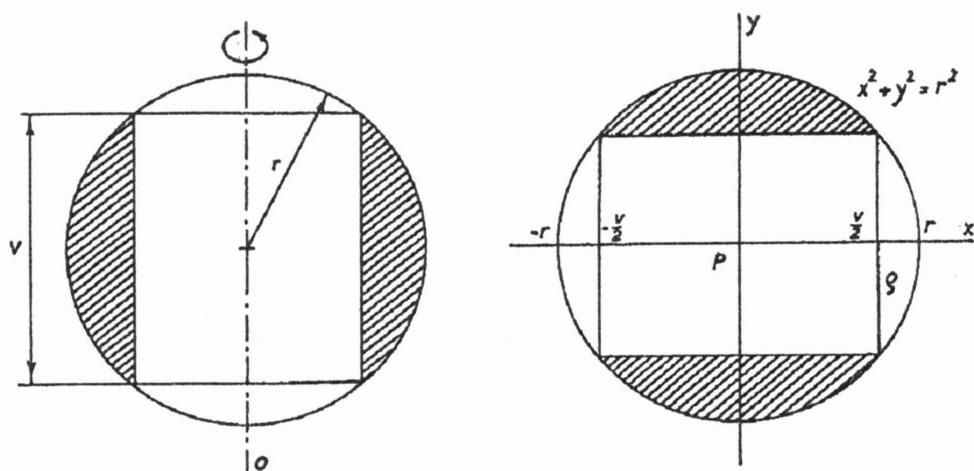
Obr. 2

V knize *Martina Gardnera Aha! Insight* ([2]) je úloha uvedena historkou o určení spotřeby koberce na pokrytí chodby tvaru mezikruží v letištní budově. Přitom je udán pouze jeden údaj (délka tečné tětivy).

### Úloha 3

Dokažte: Objem kulového prstence je závislý jen na jeho výšce, nikoliv na poloměru koule. Přitom kulovým prstencem rozumíme tu část koule, která z ní zbude vyvrtáním otvoru, jehož osa prochází středem koule (obr. 3).

Tento výsledek je na první pohled neuvěřitelný. Výpočet však dokazuje jeho správnost. Můžeme přitom využít např. věty pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného útvaru „pod



Obr. 3

grafem“ funkce  $y = f(x)$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (5)$$

a známého vzorce pro objem válce.

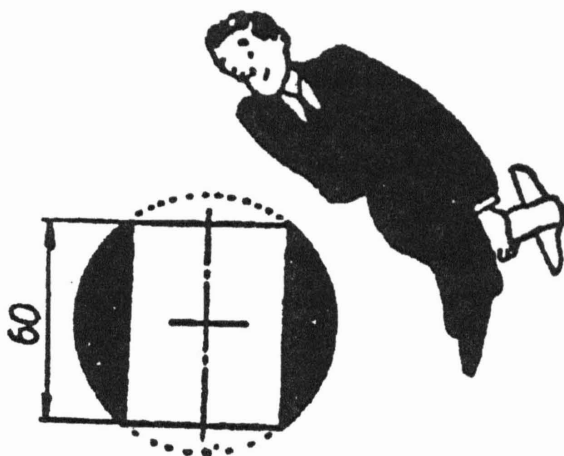
V našem případě máme (v označení podle obr. 4):

$$V = \pi \int_{-\frac{v}{2}}^{\frac{v}{2}} (r^2 - x^2) dx - \pi \left( r^2 - \frac{v^2}{4} \right) v = \frac{1}{6} \pi v^3 = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{v}{2} \right)^3. \quad (6)$$

Elementárně lze ovšem výsledek odvodit s užitím vzorce pro objem kulové vrstvy. Protože objem kulové vrstvy s podstavami  $\rho_1$  a  $\rho_2$  a výšce  $v$  je roven součtu objemu válců s podstavami  $\rho_1$  a  $\rho_2$  a výšce  $\frac{v}{2}$  a objemu koule s poloměrem  $\frac{v}{2}$  (viz např. přehled [5]) je správnost výsledku (6) ihned patrná.

Bohumil Dobrovolný uvádí v knize *Matematické rekreace* náš problém jako úlohu 103 takto (obr. 4):

„Jedna pro počtáře, o níž si leckdo přemoudřelý řekne, že je neuvěřitelně hloupá, protože je v ní málo dat: Středem plné ocelové koule jsme vyvrtali průchozí válcovou díru, přesně 60 mm dlouhou. Kolik váží zbytek koule?“



Obr. 4

Uvedme nyní dva příklady motivací, které vedly k výkonům na nejvyšší možné úrovni. První se týká důkazu Velké Fermatovy věty, jednoho z velkých výsledků matematiky 20. století, druhý je plodem básnické tvořivosti *Karla Čapka* a týká se světového rekordu.

Velká Fermatova věta zní:

*Pro  $n > 2$  nemá rovnice  $x^n + y^n = z^n$  s neznámými  $x, y, z$  řešení v oboru přirozených čísel.*

Tuto větu, formulovanou Fermatem kolem roku 1637, dokázal teprve roku 1993 anglický matematik *Andrew Wiles*, narozený r. 1953. Historii hledání důkazu Fermatovy věty popisuje kniha *Simona Singha Velká Fermatova věta* ([4]). Ocitujme z ní několik myšlenek.

Už v roce 1963 byl desetiletý *Andrew Willes* fascinován matematikou: „*Líbilo se mi, když jsme ve škole řešili různé obtížné úlohy. Nosil jsem si je i domů a doma pak sestavoval vlastní. Ale na nejlepší problém jsem narazil v místní knihovně,*“ na velkou Fermatou větu. „*Vypadala velmi snadně, a přitom ji žádný z velkých matematiků neuměl dokázat. Zároveň byla její formulace tak*

*jednoduchá, že jsem ji i já, ve svých deseti letech, byl schopen pochopit. Od tohoto okamžiku jsem věděl, že ten problém neopustím. Musel jsem ho prostě vyřešit“ ([4], s. 16).*

Přitom např. historik matematiky E. T. Bell o problému napsal: *„Je pravděpodobné, že civilizace dospěje ke svému konci dříve, než bude Velká Fermatova věta vyřešena“ ([4], s. 52).*

Po získání odměny 50 000 dolarů za vyřešení Fermatova problému napsal A. Willes:

*„Neexistuje žádný jiný problém, který by měl pro mne stejný význam. Byla to vášeň mého dětství: Nic jej nemůže nahradit. Vyřešil jsem jej. Budu zkoušet řešit i jiné problémy, tím jsem si jist. Některé z nich budou velmi těžké a opět zažiji pocit úspěchu, v matematice však neexistuje žádný jiný problém, který by mne mohl držet tak, jako ten Fermatův. Měl jsem to velmi vzácné privilegium, že jsem mohl v dospělosti dělat to, co bylo mým dětským snem. Víím, že je to neobvyklá výsada, ale když se můžete v dospělosti zabývat něčím, co pro vás znamená tak mnoho, pak vás to naplňuje víc než cokoli jiného. Po vyřešení toho problému se určitě dostaví pocit ztráty, ale současně mám obrovský pocit svobody. Byl jsem tím problémem posedlý, že jsem o něm neustále přemýšlel po osm let – od chvíle, kdy jsem se ráno probudil, až do večera, kdy jsem šel spát. To je dlouhá doba na přemýšlení o jediné věci. Ta zvláštní odysea teď skončila. Má mysl je na odpočinku“ ([4], s. 179).*

Willesova motivace byla pozitivní: vyřešit problém, který nikdo nevyřešil. V Čapkově povídce *Rekord*, z níž si připomene ukázky, jde o motivaci negativní ([6], s. 88–94).

*„Teda ten Pudil si pro mne ráno poslal, že se mu něco stalo. Já ho najdu v posteli, jak heká a nadává. Tak prý šel včera večer na sad podívat se na vajksle, a tam vám nachytl na stromě nějakého kluka, jak si cpal do kapes třešně. Víte, on je ten Pudil trochu rabiák; tak on si odepjal řemen, stáhl kluka za nohu se stromu a řeže do něho řemenem. V tom na něj někdo z druhého břehu volá: ‚Pudile, nechte toho kluka!‘ On ten Pudil trochu špatně vidí, já myslím, že to je od toho pití; zmerčil jenom, že na druhém břehu někdo stojí a kouká na něj. Proto jen pro jistotu řekl: ‚Co je ti po*

tom, lumpe,‘ a řezal do kluka tím víc. ‚Pudile,‘ zařval ten člověk na druhém břehu, ‚pusťte toho kluka, jo?‘ Pudil si myslel, co ty mně můžeš udělat, a proto jen křikl: ‚Vlez mně někam, ty troubo!‘ Jen to řek, a už ležel na zemi se strašnou bolestí v levém rameni; a ten člověk na druhém břehu povídal: ‚Já ti dám, ty mamlase statecká!‘ Poslouchejte, oni toho Pudila museli odnést, ani vstát nemohl; a vedle něho ležel tenhle kámen. Ještě v noci jeli pro doktora; doktor chtěl Pudila odvézt do špitálu, protože má všechny kosti na maděru; prý mu ta levačka zůstane chromá. Jenže ten Pudil teď o žních do špitálu nechce. Teda ráno si pro mne poslal, že toho prašivku mizerného, toho vola, co mu to udělal, musím arestýrovat. No dobrá.

Poslouchejte, když mně ukázali ten kámen, zůstal jsem koukat; on je to buližník s nějakým kyzem, takže je těžší než vypadá. Potězkejte; já jsem jej na omak odhadl na šest kilo – schází jenom jednapadesát gramů. Panečku, s takovým kamenem se musí umět házet. Pak jsem se šel podívat na ten sad a na řeku. Co byla zvalená tráva, tam se svalil ten Pudil; z toho místa byly ještě dva metry k vodě; a řeka, pane, řeka tam je na první pohled dobrých čtrnáct metrů široká, protože se tam krouť. Pane soudce, já jsem začal křičet a skákat a povídám, přineste mně honem osmnáct metrů špagátu! Potom jsem zarazil kolík na to místo, kde se svalil ten Pudil, přivázal jsem k němu ten provázek, svléknu se a plavu s druhým koncem provázku v hubě na druhý břeh. A co byste řek, pan okresní: ten špagát stačil akorát k druhému břehu: a to ještě pak přijde kus hráze a teprve nahoře je cestička. Já jsem to tříkrát přeměřil: od toho kolíku na tu cestičku, to je navlas devatenáct metrů a dvacetsedm centimetrů.“

„Člověče Hejdo,“ řekl soudce, „tohle snad není možné; devatenáct metrů, to je nějaká dálka; poslouchejte, nestál on ten člověk ve vodě, jako uprostřed řeky?“

„To mě taky napadlo,“ pravil pan Hejda. „Pane okresní, od jednoho břehu k druhému je hloubka přes dva metry, protože tam je takový zákrut. A po tom kameni byl ještě dolík v hrázi; víte, ten druhý břeh tak trochu vydláždili, aby to tam nebrala voda. Ten člověk vytrhl ten kámen z hráze a mohl jej hodit jenom z cestičky,



protože ve vodě by nestačil a na hrázi by sklouzl. To teda znamená, že hodil devatenáct celých dvacet sedm setin metru. Víte, co to je?“

„Třeba měl prak,“ mínil soudce nejistě.

Pan Hejda na něho vyčítavě pohleděl. „Pane okresní, vy jste nikdy neházel z praku, že jo. Tak to zkuste vystřelit z praku dvanáctiliberní kámen; to byste musel mít katapult. Pane, já jsem se s tím kamenem dřel dva dny; zkoušel jsem udělat nějakou smyčku a roztočit jej, víte, jako při vrhu kladivem; já vám říkám, to vám vyklouzne z každé smyčku. Pane, to byl čistý vrh koulí. A víte,“ vyhrkl rozčileně, „víte vy, co to je? To je světový rekord. Tak.“

„Ale dejte pokoj,“ užasl pan soudce.

„Světový rekord,“ opakoval četník Hejda slavnostně. „Ona závodní koule je těžší, váží sedm kilo; a letošní rekord v závodní kouli je šestnáct metrů bez nějakého centimetru. Devatenáct let, pane, byl rekord patnáct a půl metru; až letos jeden Američan, jakpak on se jmenuje, nějak jako Kuck nebo Hirschfeld, hodil skoro šestnáct. Tak to by při šestikilové kouli mohlo dělat osmnáct nebo devatenáct metrů. A my tady máme o dvacet sedm setinek víc! Pane okresní, ten chlap by dohodil závodní kouli dobrých šestnáct a čtvrt, a bez tréninku! Ježíši Kriste, šestnáct a čtvrt metru! Pane soudce, já jsem starý vrhač; na Sibíři, to vždycky kluci volali, Hejdo, hoď to tam – totiž ruční granát, víte? A ve Vladivostoku jsem házel s americkými mariňáky; já jsem dohodil závodní kouli čtrnáct, ale jejich kaplan udělal o čtyři body víc. Hergot, my jsme se něco na Sibíři naházeli! Ale tenhle kámen, pane, jsem hodil jenom patnáct a půl metru; víc jsem ze sebe nedostal. Devatenáct metrů! Hrom do toho, řekl jsem si, toho chlapa musím dostat; ten nám udělá rekord. Představte si, vyfouknout Americe rekord!“

„A co s tím Pudilem?“ namítl soudce.

„Čert vem Pudila,“ křikl pan Hejda. „Pane soudce, já jsem zahájil pátrání po neznámém pachateli světového rekordu; to je národní zájem, no ne? Tak nejdřív jsem mu zaručil beztrestnost za toho Pudila.“

...

„Včera k večeru ke mně přivedli mládence, a to prý je ten,

co tím kamenem potloukl toho Pudila. Však ho, huncúta jednoho, uvidíte, čeká venku. ,Poslouchej, Lysický,‘ povídám mu, ,tak tys hodil tímhle kamenem po Pudilovi?‘ ,Jo,‘ povídá on, ,on mně Pudil nadával, a já jsem se dožral, a on tu jiný kámen zrovna nebyl – ‘ ,Tak tady máš jiný kámen,‘ jářku, ,a teď dohoď na Pudilův břeh; ale jestli nedohodíš, ty kujóne, tak ti proženu perka!’

Tak on vzal ten kámen – pracky měl jako lopaty, postavil se na hráz a mířil; koukám, techniku neměl žádnou, styl žádný, nepracoval nohama ani trupem, a plums! Hodil kámen do vody asi čtrnáct metrů; víte, je to dost, ale – Dobrá, tak já mu ukazuju, Ty trulante, to se musíš postavit takhle, pravým ramenem dozadu, a když hodíš, tak současně přitom musíš vyrazit tím ramenem, rozumíš?‘ ,Jo,‘ on na to, zkrřivil se jako svatý Jan Nepomucký a plums! Hodil kámen na deset metrů.

Víte, to mě dožralo. ,Ty lumpe,‘ křičím, ,ty žes trefil toho Pudila? Ty lžeš!‘ ,Pane vachmajstr,‘ povídá on, ,pánbu ví, že jsem ho trefil; ať se tam Pudil postaví, však já na něj zase dohodím, na toho psa zlýho.‘ Pane, já jsem teda běžel za tím Pudilem a prosím, pane Pudile, koukejte se, tady jde o světový rekord; prosím vás, pojdte zas nadávat na ten váš břeh, on ten cihlář po vás hodí ještě jednou. – A to byste nevěřil, pane soudce: ten Pudil že ne, a že nepůjde ani zanic. Vidíte, tihle lidí nemají žádné vyšší zájmy.

Tak jdu zas na toho Vaška, toho cihláře. ,Ty podvodníku,‘ křičím na něj, ,to není pravda, žes Pudila pobil; ten Pudil říká, že to byl jiný.‘ ,To je lež,‘ povídá Lysický, ,to jsem udělal já.‘ ,Tak ukaž,‘ povídám, ,dohodíš-li tak daleko!‘ Ten Vašek se jen drbe a směje: ,Pane vachmajstr,‘ povídá, ,takhle naprázdno, to já neumím; ale do toho Pudila trefím dycky, na toho mám dožer.‘ ,Vašku,‘ říkám mu po dobrém, ,dohodíš-li, pustím tě; když nedohodíš, tak půjdeš sedět pro těžké ublížení na těle, žes toho Pudila zchromil; ty holomku, za to dostaneš půl roku,‘ ,Tak to já si odsedím v zimě,‘ řekl ten Vašek; a já jsem ho teda ve jménu zákona zatknul.“

...

„Tedy vy jste ten Václav Lysický,“ řekl okresní soudce, pohlížeje přísně na bledovlasého delikventa. „Vy se přiznáváte, že jste v úmyslu ublížit mu hodil tenhle kámen na Františka Pudila a že

*jste mu přivodil těžké zranění. Je to pravda?“*

*„Prosím, pane soudce,“ začal provinilec, „to bylo tak: on ten Pudil tam mlátil nějakého kluka, a já jsem na něj volal přes tu řeku, aby toho nechal, a on mně začal nadávat –“*

*„Hodil jste ten kámen nebo ne?“ spustil soudce.*

*„Prosím, hodil,“ řekl provinilec zkroušeně; „ale on mně nadával, a tak já jsem popad ten kámen –“*

*„Hrom do vás,“ rozkřikl se soudce. „Proč lžete, člověče? Nevíte, že na to je veliký trest, když chcete obulíkovat úřady? My víme dobře, že jste ten kámen nehodil!“*

*„Hodil, prosím,“ koktal mladý cihlář, „ale on mně Pudil řekl, abych mu vlezl někam –“*

...

*„Poslouchejte, člověče, poslední slovo: hodil jste ten kámen nebo ne?“*

*„Hodil,“ mumlal Václav Lysický s beraní tvrdohlavostí.*

*„Vy osle,“ vyhrkl soudce, „hodil-li jste ten kámen, tak to je těžké ublížení na těle a s tím půjdete ke krajskému soudu a dostanete několik měsíců, rozumíte? Nechte už toho naparování a přiznejte se, že jste si to s tím kamenem vymyslel; já vám dám jenom tři dny pro klamání úřadů, a můžete jít. Tak co, uhodil jste tím kamenem toho Pudila nebo ne?“*

*„Uhodil,“ pravil Václav Lysický zarytě. „On mně přes tu řeku nadával –“*

Andrew Willes i Čapkův Václav Lysický byli posedlí myšlenkou. První z nich myšlenkou najít důkaz, druhý touhou po odplatě. *„Bez posedlosti, ať už čímkoliv, by se lidský vývoj úplně zastavil, protože právě schopnost „dát se posednout“ myšlenkou je to, co nás odlišuje od zvířat“ ([7], s. 217).*

## Literatura

- [1] Čupr, K., *Geometrické hry a zábavy*, JČMF, Praha, 1949.

- [2] Gardner, M., *Aha! Insight*, (ruský překlad *Jest' ideja*), Mir, Moskva, 1982.
- [3] Dobrovolný, B., *Matematické rekreace*, Práce, Praha, 1961.
- [4] Singh, S., *Velká Fermatova věta*, Academia, Praha, 2000.
- [5] Polák, J., *Přehled středoškolské matematiky*, SPN, Praha, 1972.
- [6] Čapek, K., *Povídky z jedné kapsy*, Československý spisovatel, Praha, 1961.
- [7] Komárek, S., *100 esejů o přírodě a společnosti*, Vesmír, Praha, 1965.

*Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.*

*Katedra matematiky*

*Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové*

*Víta Nejedlého 573, 500 03 Hradec Králové 3*

*e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz*