Bernhard Kutzler

CAS jako pedagogické prostředky ve vyučování a učení se matematice (2)

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 3, 165–175

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150826

CAS JAKO PEDAGOGICKÉ PROSTŘEDKY VE VYUČOVÁNÍ A UČENÍ SE MATEMATICE[3] (2)

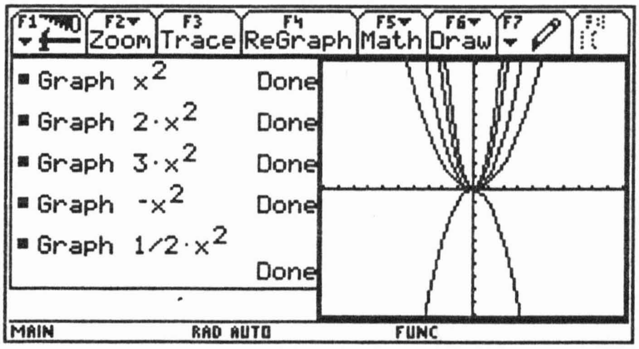
BERNHARD KUTZLER

Dokončení z minulého čísla

(2.3) Vizualizace

Vizualizace znamená ilustraci objektu, faktu nebo procesu. Výsledek může být grafický, numerický nebo algebraický. Dnes je tento termín většinou používán pro grafické ilustrace algebraických nebo numerických objektů či faktů. (Termín je používán jak pro vlastní proces ilustrace, tak i pro jeho výsledek.) Vizualizace jako technika vyučování matematice nabyla na významu v těch zemích, kde se šířeji užívají grafické kalkulátory.

Vizualizace se nyní používá především pro získání přehledu o možných reprezentacích daného problému; většinou pro studium vztahu mezi algebraickou a grafickou reprezentací. Typickým příkladem je zkoumání, jak parametr a ovlivňuje tvar grafu funkce $y = a \cdot x^2$.



Obr. 5

[3]Z anglického originálu do češtiny přeložili A. Hošpesová a R. Hašek.

Jestliže požadujeme, aby naši studenti ručně kreslili grafy x^2, $2x^2$, $3x^2$, $\frac{1}{2}x^2$ a $-x^2$, „dobří“ studenti to udělají dobře, ale pro většinu matematicky handicapovaných studentů se to změní v pracné a nudné cvičení v kreslení grafů, během něhož zapomenou, PROČ měli tento graf nakreslit. Tím je kvůli jejich chabým dovednostem v rýsování cíl vyučování ztracen. Použití CAS nebo grafických kalkulátorů pomůže studentům zůstat ve spojení s cílem. Frank Demana a Bert Waits jsou hlavními obhájci vyučovacího stylu, kterému se říká „síla vizualizace“ (viz [3], [4], [5]).

V psychologii učení byl objeven pojem „posilování“. Ukázalo se, že posilování nejlépe funguje, jestliže je bezprostředně následováno činností. Příkladem z každodenního života je dítě, které dá ruku na horká kamna. Bezprostřední bolest je nejlepší podmínkou pro to, aby se dítě naučilo víckrát to neudělat. Jestliže by se pocit bolesti objevil o několik minut později, dítě by jej pravděpodobně nespojovalo s tím, že se (před chvílí) dotklo horkého plátu a pravděpodobně by se nic nenaučilo.

Když používáme kalkulátor jako prostředek vizualizace, bezprostřední zpětná vazba je významná. Jestliže napíšete na svém kalkulátoru x^2 a stisknete vhodné tlačítko, objeví se o zlomek sekundy později odpovídající graf. O výsledném obrázku můžeme diskutovat, graf může být propojen s vyjádřením atd. Uvažujme o studentech slabších v matematice a porovnejme vzdělávací efekt úkolu „nakresli graf“ v případě, že to musejí dělat ručně, a v případě, že použijí kalkulátor. Ručně vytvořený graf by zabral mnoho času a pravděpodobně by měl jen nezřetelnou podobnost se správným grafem. („Co můžete pozorovat z chybného příkladu?“) Jen s pomocí kalkulátoru má tento student šanci objevit a osvojit si spojitost mezi vyjádřením a (správným!) grafem. Vytváření grafů tužkou na papíře jistě bude cennou aktivitou, která je důležitá pro porozumění vztahů mezi algebraickou a grafickou reprezentací. Nicméně bezprostřednost a správnost jsou tak klíčovými psychologickými faktory, že vybavení matematicky handicapovaných žáků vhodným prostředkem (CAS, grafický kalkulátor) se stává pedagogickou povinností.

Tento příklad velmi jasně ukazuje, že to, zda učitel používá nějaký prostředek pro podporu žákovské aktivity a jak jej používá, závisí na pedagogických cílech spojených s touto aktivitou. To také znamená, že ve vyučování matematice podporovaném technologiemi se učitel stává důležitějším a tím roste i význam jeho pregraduální a postgraduální přípravy. Síla vizualizace je široce využívána s grafickými kalkulátory. Další důležitý přístup týkající se algebraických dat bude ukázán v následujícím.

(2.4) Koncentrace, soustředění, zhuštění

Vyučování a učení se matematice můžeme porovnat se stavbou domu, „domu matematiky". Témata, která učíme, a závislosti mezi nimi jsou srovnatelné s podlažími domu. Předtím, než je možné postavit druhé patro domu, je třeba dokončit první. Stejně tak zvládnutí téměř všech matematických témat vyžaduje mistrovství v dříve naučených tématech. Ukažme si to na příkladě řešení lineární rovnice s jednou proměnnou.

Danou rovnici $5x - 6 = 2x + 15$ je třeba transformovat na tvar $x = \ldots$ Toho dosáhneme, když vybereme a použijeme vhodný sled ekvivalentních úprav. Obvykle se studentovi radí, aby „členy s x" převedl na jednu stranu rovnice a všechny ostatní na druhou. Proto začínáme odečtením $2x$:

$$5x - 6 = 2x + 15 \qquad | -2x$$

Vybranou ekvivalentní úpravu *použijeme* na obě strany rovnice a rovnici zjednodušíme:

$$3x - 6 = 15$$

Nyní musíme vybrat jinou ekvivalentní úpravu, např. $+6$,

$$3x - 6 = 15 \qquad | +6$$

použít ji a opět zjednodušit:

$$3x = 21$$

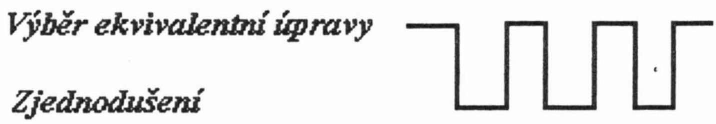
Zabýváme-li se praxí v matematickém vyučování, chceme zvláště vědět, proč studenti dělají určité chyby. Typická chyba v tomto stádiu začíná následujícím: „Před proměnnou x jsou 3. Abych se

3 zbavil, 3 odečtu.“ Tento student pravděpodobně napíše

$$\begin{aligned} 3x &= 21 \qquad \mid -3 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

a věří, že rovnice je vyřešena.

Co se stalo špatného a jak to mohou technologie vylepšit? Analýzou kroků uskutečněných výše objevíme dvě alternativní úlohy: (1) výběr ekvivalentní úpravy, (2) zjednodušení algebraického vyjádření. Výběr ekvivalentní úpravy je zde úkolem vyšší úrovně, je to podstata strategie pro nalezení řešení rovnice. Je to nová dovednost, kterou si student musí osvojit, když se učí řešit rovnice. Vlastní zjednodušení rovnice je úkol nižší úrovně, pro který je podle učitelova očekávání student již dostatečně vycvičen.



Obr. 6

Obrázek 6 ukazuje, že student osvojující si novou dovednost, musí tento proces opakovaně přerušit, aby provedl výpočet. To je, jako kdybychom šachistu opakovaně rušili během obtížné šachové partie. Ve skutečnosti je to ještě horší, protože přerušení může ovlivnit „hru“. Chyba udělaná během přerušení, tj. během úlohy nižší úrovně, vážně ruší úlohu vyšší úrovně a může bránit studentovu učení. To přesně vede k chybnému řešení $x = 18$ ve výše zmíněném příkladu. Po rozhodnutí odečíst 3 se student musí plně soustředit na odečtení čísla 3 od obou stran rovnice, zatímco „zapomíná“ důvod pro výběr ekvivalentní úpravy. Ve skutečnosti student začíná další řádku s „$x =$“ jednoduše „protože byla vybrána úprava odečíst 3 s cílem dosáhnout $x =$ na levé straně“. Potom ale na vyšší úrovni ekvivalentních úprav, má student dojem, že odečtení čísla 3 zjednodušilo rovnici tak, jak bylo požadováno.

Tato opakovaná změna úrovní se nevyhnutelně objeví ve většině témat ve školní matematice. Zdá se, že ústředním problémem v matematickém vyučování je, že se studenti musí učit nové dovednosti, zatímco procvičují „staré“.

Použitím CAS (používáme Derive) by mohl být proces osvojování si dovednosti veden následujícím způsobem. Nejprve zapíšeme rovnici.

▶ $5x - 6 = 2x + 15$ (ENTER)

```
#1:  5·x - 6 = 2·x + 15
```

Pak následuje vstup ekvivalentní transformace (#1 je odkaz na výše uvedenou rovnici).

▶ #1 − $2x$ (ENTER), pak zjednoduším stisknutím tlačítka $\boxed{=}$.

```
#2:  (5·x - 6 = 2·x + 15) - 2·x
#3:                              3·x - 6 = 15
```

Zjednodušení, tj. použití ekvivalentní úpravy obou stran rovnice, bylo provedeno CAS. Potom student vybírá další ekvivalentní úpravu.

▶ #3 + 6 (ENTER), opět zjednodušíme tlačítkem $\boxed{=}$.

```
#4:  (3·x - 6 = 15) + 6
#5:                              3·x = 21
```

Napodobíme studenta, který udělal výše zmíněnou chybu:

▶ #5 − 3 (ENTER), zjednodušíme tlačítkem $\boxed{=}$.

```
#6:  (3·x = 21) - 3
#7:                              3·x - 3 = 18
```

Je jasné, že CAS zjednoduší rovnici správně, student tak dostává *bezprostřední* zpětnou vazbu, že úprava „odečíst 3" není úspěšná (nezjednodušila rovnici na očekávané „x ="). V tomto příkladu jsme opět narazili na dvě témata diskutovaná dříve: (1) student *experimentuje* s možnými ekvivalentní úpravami, z toho důvodu tento příklad také zahrnuje aspekt experimentálního učení, (2) *bezprostřednost* výsledku použité úpravy souvisí s tím, po čem jsme volali v části o vizualizaci.

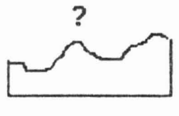
Student, který postupuje podle výše zmíněného příkladu s podporou CAS, se může plně soustředit na dovednost vyšší úrovně vybrat ekvivalentní úpravu. Dovednost nižší úrovně (zjednodušení) je přenechána CAS. (Schématicky tento postup ukazuje obr. 7).

Obr. 7

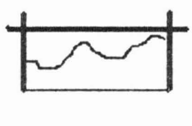
V příspěvcích [12], [13] jsou podrobné návody, jak používat Derive nebo TI-92 (TI-89) pro učení se/vyučování řešení lineárních rovnic. Výše uvedený algebraický přístup je diskutován dále, stejně jako numerické a grafické přístupy.

(3) Metoda lešení (The Scaffolding Method)

V předchozí části o koncentraci srovnáváme vyučování matematice se stavbou domu. V duchu metafory je metoda lešení v matematickém vyučování přeložena jako metoda jak postavit nové patro nad patrem ještě nedokončeným. Např. když začneme stavět patro „výběr ekvivalentní úpravy", patro „zjednodušení" je pro mnoho studentů dosud nekompletní. Ve školním vyučování ve škole jednoduše nemáme dost času čekat, až všichni studenti dokončí všechna „předchozí poschodí". Osnovy nutí učitele pokračovat s dalším tématem nezávisle na individuálním vývoji studentů. Naskýtá se otázka, jak může student „stavět patro na nedokončeném patru".



Výše zmíněný příklad ukazuje, co navrhuji odpovědět na tuto otázku. Zatímco se student učí dovednost vyšší úrovně, kalkulátor řeší všechny podproblémy, které vyžadují dovednosti nižší úrovně. V duchu metafory je kalkulátor lešením vystavěným nad nedokončeným patrem.



Příkladem na řešení lineární rovnice jsme ukázali využití programu Derive jako lešení nad patrem zjednodušení. Budeme pokračovat ukázkou použití metody lešení při řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminací.

Řešme soustavu $2x + 3y = 4$, $3x - 4y = 5$. Nejprve student zadá rovnice:

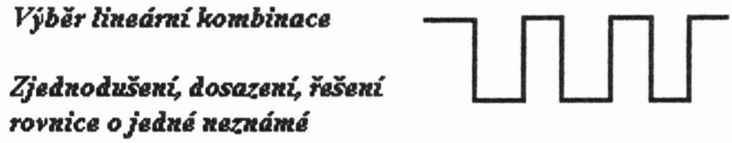
► $2x + 3y = 4$ (ENTER)

► $3x - 4y = 5$ (ENTER)

#1: $2 \cdot x + 3 \cdot y = 4$

#2: $3 \cdot x - 4 \cdot y = 5$

Gaussova eliminace vyžaduje, abychom vybrali takovou lineární kombinaci dvou rovnic, ve které je jedna proměnná eliminována. To je to, co se musíme naučit. Vše ostatní (zjednodušení, substituce, řešení rovnice s jednou proměnnou) jsou dílčí dovednosti, o kterých učitel předpokládá, že si je již studenti dostatečně nacvičili.



Obr. 8

Snažíme se eliminovat y sečtením čtyřnásobku první rovnice a trojnásobku druhé rovnice.

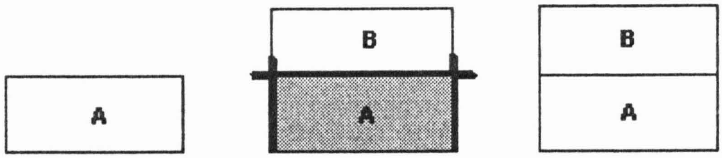
► $4 * \#1 + 3 * \#2$ (ENTER), pak zjednodušíme s $\boxed{=}$.

#3: $4 \cdot (2 \cdot x + 3 \cdot y = 4) + 3 \cdot (3 \cdot x - 4 \cdot y = 5)$

#4: $17 \cdot x = 31$

Proměnná y zmizela, jak jsme požadovali. Jak vypadá školní výuka tohoto tématu, když užíváme papír a tužku? Někteří studenti zvolí správnou kombinaci, ale kvůli chybě ve výpočtu proměnná nezmizí. Jiní studenti vyberou chybnou lineární kombinaci a proměnná zmizí, protože „musí“ zmizet. Pro obě skupiny studentů jsou jejich nedostatky blokem, který jim brání naučit se základní techniku Gaussovy eliminace. Právě tito studenti zůstávají pozadu stále více, jak se „zvyšuje dům matematiky“.

Ve výše zmíněném cvičení je algebraický kalkulátor lešením, které kompenzuje nedostatky v dovednostech nižší úrovně a pomáhá vyloučit chyby. V případě, že konečným cílem vyučování je naučit studenty řešit soustavy rovnic (nebo vykonat jinou dovednost B) ručně (např. protože studenti jsou hodnoceni celkově na konci školního roku), pak se doporučuje postupovat ve třech krocích. Prvním z nich je vyučování a nácvik dovednosti A. Druhým krokem vyučování je nácvik dovednosti B při použití kalkulátoru k řešení podproblémů, které vyžadují dovednost A (tj. student se může plně soustředit na učení se dovednosti B). Třetím krokem je spojení dovednosti A a B bez podpory technologií.



Obr. 9

To je jedna z mnoha vhodných metod použití CAS jako pedagogického prostředku.

Okamžité použití technologie může pomoci „rozdrobit" proces učení na malé, jednoduše „stravitelné" kousky. Pro méně talentované studenty, kteří by nemohli spolknout „velké kousky", jež jim nabízíme v tradičním matematickém vyučování, to může být jediná cesta k osvojení si znalostí. Je pro ně lehčí sledovat postup, aniž by se ztráceli v takových detailech jako je zjednodušování. Jestliže srovnáváme vyučování matematice se stavbou domu, použití technologií se podobá použití lešení.

Metodou lešení je jakákoliv pedagogicky ověřená posloupnost použití i nepoužití technologií pro zjednodušení, experimentování, vizualizaci nebo koncentraci, buď ve smyslu automatizace, nebo kompenzace.

Uvedené použití technologie jako pedagogického prostředku je zcela nezávislé na tom, zda se smí technologie používat při zkoušce. Metoda lešení se zaměřuje na podporu procesu učení, tj. může pomáhat v dosahování (tradičních) cílů vyučování. Zde jsou technologie jen pomůckou při nácviku. Jako nám domácí trenér může pomoci získat fyzické dovednosti, vhodné užití CAS může být matematickým tréninkovým střediskem, které pomáhá získávat intelektuální/matematické dovednosti. Proto technologie mohou a měly by být uvedeny jako pedagogický prostředek nezávislý na změnách osnov nebo hodnocení. Prostředky CAS mohou pomáhat ve výuce středoškolské matematiky.

V článku [14], resp. [15] popisuji, jak lze využít Derive, resp. TI-92 (TI-89) při řešení soustav lineárních rovnic ve škole. Kromě toho, že jsou v příručce uvedeny další detaily k výše zmíněnému přístupu, popisuje také numerické a grafické metody spolu se substituční metodou.

(4) Závěrečné poznámky

V Rakousku byla v roce 1991 všechna gymnázia a střední technické průmyslové školy (Höhere Technische Lehr-anstalten) vybaveny programem Derive. V souvislosti s tím byl řešen výzkumný projekt, který je znám jako „Rakouský projekt Derive". Projekt zahrnoval 800 studentů, kteří se učili běžnou matematiku s programem Derive. Výsledky byly publikovány v německém jazyce v [9], část výsledků je také možno nalézt v angličtině v publikaci [1]. V akademickém roce 1997/98 pracoval větší tým na „Rakouském projektu TI-92 I" s 2 000 studenty, kteří používali TI-92 v běžných matematických třídách. Navazoval pak „Rakouský projekt TI-92 II" s 3 000 studenty. Výsledky je možné najít na internetové adrese http://www.acdca.ac.at.

Rakouské i další výzkumy ukázaly, že správné používání technologií přináší:

- efektivnější učení se a vyučování
- nezávislejší produktivní činnosti studentů
- více studentské tvořivosti
- zvyšující se význam učitele

Povinností učitele je doprovázet a řídit studenty na jejich částečně individuální objevitelské cestě světem matematiky. Klíčem k úspěchu ve vyučování matematice je proto dobrý učitel, který získal dobré učitelské vzdělání. Technologie nemění vyučování, ale může se pro učitele stát katalyzátorem, který mění vyučovací metody. Mohou tak přispět ke zlepšování matematického vyučování ve školách.

V případě, že máte otázky nebo návrhy, napište mi prosím na b.kutzler@eunet.at. Pravidelně aktualizovanou kolekci informací o použití technologií v matematickém vyučování je možné najít na www.kutzler.com. Zvláště děkuji Vlastě Kokol-Voljc za podnětné připomínky a cennou zpětnou vazbu.

Literatura

[1] Aspetsberger, K., Fuchs, K., Research Information Ltd., *The International DERIVE Journal* **3**(1), 1996.

[2] Buchberger, B., Why Should Students Learn Integration Rules?, *TRISC-Linz Technical Report no. 89-7.0,* 1989.

[3] Demana, F., Waits, B., The Role of Technology in Teaching Mathematics, *The Mathematics Teacher* **82**(1), 1990.

[4] Demana, F., Waits, B., A Computer for All Students, *The Mathematics Teacher* **84**(2), 1992.

[5] Demana, F., Waits, B., Graphing Calculator Intensive Calculus: A First Step in Calculus Reform for All Students, *Proc. Of the Preparing for New Calculus Conference,* 1994.

[6] Einstein, A., *Out of My Later Years*, Carol Publ. Comp, 1956.

[7] Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Klett Studienbücher, 1979.

[8] Herget, W. et al, Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS Environment, *Ohio Journal of School Mathematics* **42**(2), 2000, 13–20.

[9] Heugl, H., Klinger, W., Lechner, J., *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen (Ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt)*, Addison-Wesley, Bonn, 1996.

[10] Kutzler, B., *Improving Mathematics Teaching with DERIVE,* Chartwell-Bratt, Bromley, 1995.

[11] Kutzler, B., *Introduction to the TI-92 (Handheld Computer Algebra)*, bk teachware, Hagenberg, 1996.

[12] Kutzler, B., *Solving Linear Equations with Derive (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method)*, bk teachware, Hagenberg, 1998.

[13] Kutzler, B., *Solving Linear Equations with the TI-92 (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method)*, bk teachware, Hagenberg, 1998.

[14] Kutzler, B., *Solving Systems of Equations with Derive (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method)*, bk teachware, Hagenberg, 1998.

[15] Kutzler, B., *Solving Systems of Equations with the TI-92 (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method)*, bk teachware, Hagenberg, 1998.

[16] Kutzler, B., Two-Tier Exams as a Way to Let Technology In, *Exam Questions and Basic Skills in Technology-Supported Mathematics Teaching (Proceedings Portoroz'2000)*, Portoroz (Slovenia), 2000, 121–124.

[17] Kutzler, B., What Math Should We Teach when We Teach Math with CAS, *Technical Report*, 2001.

[18] Marin, N., Benarroch, A., A Comparative Study of Pagetian and Constructivist Work on Conceptions Science, *Int. J. of Science Education* **16**(1), 1994, 1–15.

[19] Piaget, J., *Die Entwicklung des Erkennens I – Das mathematische Denken*, Klett, Stuttgart, 1972.

Bernhard Kutzler
ACDCA (Rakouské centrum pro didaktiku počítačové algebry)
Hasnerstrasse 9/10
A-4020 Linz (Austria)
e-mail: b.kutzler@eunet.at