Jana Hanušová

Objevování vzorce pro povrch válce

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 2, 90–100

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150821

OBJEVOVÁNÍ VZORCE PRO POVRCH VÁLCE

JANA HANUŠOVÁ

Úvod

V tomto článku budu na rozboru jedné hodiny matematiky v kvartě osmiletého gymnázia ilustrovat několik svých zkušeností s konstruktivistickými metodami ve vyučování matematiky.

Při probírání vzorce pro povrch válce jsem v kvartě osmiletého gymnázia zvolila konstruktivistický přístup, jehož cílem bylo dovést formou skupinového vyučování žáky k samostatnému objevu tohoto vzorce. Své vyučování jsem koncipovala formou experimentu, abych mohla později svou práci analyzovat.

Na čtvrté vyučovací hodině dne 15. 10. 2001 bylo přítomno 28 žáků, 13 dívek a 15 hochů. Scénář experimentu byl předem připraven a byl evidován pomocí 1) modelů sítí válců a písemnými záznamy žáků při hledání vzorce pro povrch válce, 2) písemného popisu práce, který o svém hledání vzorce napsala každá skupina, 3) písemných záznamů o průběhu experimentu, které jsem po hodině zapsala, 4) deseti fotografií zachycujících práci jednotlivých skupin, 5) následných rozhovorů s několika žáky, které se uskutečnily s odstupem půl roku (v polovině dubna 2002).

Příprava experimentu

Patřím k učitelům, kteří věří, že konstruktivistické přístupy k vyučování matematice, při nichž je žákův podíl na odhalování matematických pojmů, vztahů a procesů výrazný, jsou účinnějším edukačním nástrojem než tradiční vyučování, založené na sdělování hotových produktů matematiky. Snažím se své zkušenosti nabízet těm kolegům, kteří o ně jeví zájem. Při přípravě na jeden takový seminář pro učitele okresu Mladá Boleslav jsem se rozhodla přinést ke společné diskusi výsledky jedné vyučovací hodiny realizované konstruktivistickým postupem. Zvolila jsem téma *Povrch válce*, přesněji: *objevení vzorce pro povrch válce.*

Moje příprava začala rozhodnutím, že použiji skupinové vyučování, které, aspoň pokud se jedná o tuto třídu, má na většinu žáků silný motivační vliv. Zvažovala jsem vhodné přístupové strategie, tedy jaké výzvy k žákům použiji pro „nastartování“ a směřování jejich práce. Vybírala jsem z těchto tří alternativ:

První alternativa:

1. každá skupina dostane fyzický model válce, který pomůže žákům vyvodit hledaný vzorec
2. pak podle vytvořeného vzorce vypočítají numericky povrch „svého“ válce.

Výhodou uvedeného postupu je garance dobré představy základního objektu – válce i manipulativní činnost. Jeho slabinou je skutečnost, že konkrétní výpočet (separovaný model vzorce) přichází až po abstraktním poznání. To neodpovídá postupu, který popisují Hejný a Kuřina (2001, 103 a 104) a který mi byl impulsem pro vytvoření druhé alternativy.

Druhá alternativa:

1. každá skupina dostane fyzický model válce a zjistí, kolik barvy je zapotřebí na jeho natření
2. konkrétní výpočet se žáci pokusí zobecnit – najít obecný vzorec

Pro žáky, kterým je válec jako geometrické těleso dobře znám, je to vyhovující postup, ale pro žáky, kteří zatím důvěrné poznání válce nemají, to může být náročné, neboť pracují s ne zcela jasným objektem. Zejména může být pro ně těžké objevit, že plášť válce je vlastně obdélník a jedna jeho strana má délku obvodu kruhů podstavy. Obě tyto myšlenky jsou přítomny v procesu lepení válce z jeho sítě. Proto jsem se rozhodla pro následující třetí a závěrečnou alternativu.

Třetí alternativa:

1. Navrhněte síť válce, tuto síť narýsujte na barevný papír.

2. Síť válce vystřihněte a modelováním válce ověřte správnost.

3. Změřte potřebné údaje a vypočtěte povrch vymodelovaného válce.

4. Nalezněte vzorec pro výpočet povrchu válce.

K realizaci této alternativy přinese učitel barevné papíry, nůžky a rýsovací potřeby mají žáci u sebe.

Předpokládaný řešitelský proces žáků je možné rozdělit do tří částí. První, iniciovaná úlohami 1 a 2, je zaměřená na manuální modelování geometrických objektů se záměrem získat zkušenosti s prostorovým objektem a jeho sítí. Druhá, iniciovaná úlohou 3, vede žáky k „měřictví" a třetí, poslední, iniciovaná úlohou 4, k abstrakci procesu měření a počítání s cílem objevit obecný vzorec. Postup od druhé části ke třetí je abstrakčním zdvihem od separovaného modelu k modelu univerzálnímu (Hejný, Kuřina, 2001, 84).

Předchozí zkušenosti žáků

Žáci již znají pojem válec (ve smyslu rotační válec), s pojmy podstava a plášť se setkali u kvádru. Poslední dva týdny před tématem válec bylo probíráno téma kruh, kde nejprve žáci pomocí mnoha měření kruhových předmětů objevili, že u kruhů je poměr obvod/průměr nezávislý na velikosti kruhu a je roven přibližně číslu 3. Někteří žáci si na číslo π vzpomněli, zejména ti, kteří pracují často s kalkulačkou. V tabulkách jsme pak našli hodnotu $\pi \approx 3,14$ a získané poznání zapsali stručně vztahem $l = 2\pi r$ a $l = \pi d$. Po seznámení se a zažití pojmu obvod kruhu jsme přistoupili k hledání způsobu, jak určit obsah kruhu. První pokusy žáků většinou vycházely z kruhu vepsaného do čtverce na čtverečkovaném papíře. Pak následovala výzva: *Rozdělte kruh na 12 částí tak, aby se z nich dal sestavit útvar blízký k útvaru, který dobře znáte.* Činnost dělení a sestavování nových útvarů dovedla žáky k poznání, že obsah kruhu je dán součinem čísel πr a r.

Realizace experimentu

Na začátku hodiny jsem vyzvala žáky, aby se rozdělili do dvou až čtyřčlenných skupin. Tento způsob organizace hodiny je pro tuto třídu běžný a žáci jej plní okamžitě a spontánně. Každé z osmi vytvořených skupin jsem dala několik barevných papírů a jeden bílý. K tomu jsem řekla: *Barevné papíry máte na experimentování a na ten bílý mi napište, jak jste postupovali.* Na tabuli jsem pak napsala všechny čtyři úkoly uvedené ve třetí alternativě nahoře.

Skupiny se ihned pustily do práce, která trvala 35 minut. Klima bylo zcela uvolněné, všechny skupiny po celou dobu pracovaly zaujatě. Výjimku tvořila skupina číslo 6 složená ze čtyř chlapců, z nichž pracoval pouze jeden a ostatní tři se bavili. Já jsem se věnovala fotografování a zaznamenávání práce a chování žáků. Ojediněle jsem na požádání pomohla návodnou úlohou.

Na závěr jednotlivé skupiny prezentovaly výsledky své práce – obrázek sítě, model vytvořeného válce a vzorec, který objevily. Společně jsme upřesnili terminologii a značení (podstava, plášť, výška válce, poloměr podstavy) a já jsem na tabuli shrnula podstatné a správné objevy žáků.

Popis práce jednotlivých skupin s komentáři

Každá skupina měla jinou organizaci práce a objev vzorce probíhal jiným způsobem. Níže stručně ilustruji práci dvou skupin, které se mi jevily jako nejzajímavější. Vždy uvedu sociální klima ve skupině, postup objevu vzorce a můj komentář.

Skupina č. 1 – dva chlapci, oba úspěšní řešitelé okresních kol MO.
Sociální klima: Spolupráce obou žáků je dialogická, žádný z žáků není dominantní, myšlení obou je paralelní, nedochází ke konfliktu.
Postup: Kopie žákovského řešení skupiny č.1 – viz obr. 1[3].

Barevný papír žáci nepoužívají, ihned kreslí síť válce jako obdélník $ABCD$ se správně „přilepenými“ kruhy/kružnicemi [1][4]

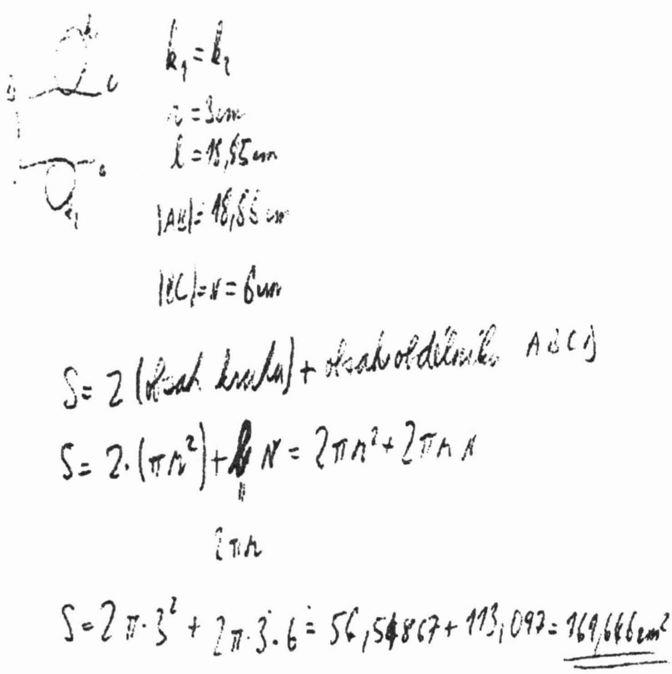
[3]Dodané obrázky jsou sice nekvalitní, reprodukujeme je však jako ukázku grafického řešení úlohy. Pozn. red.

[4]Číslo v hranaté závorce odkazuje k příslušnému bodu v komentáři, kde je daný jev podrobněji analyzován.

označenými k_1 a k_2. Obrázek je malý, jeho rozměry jsou asi 3 cm × × 3 cm. Dále následuje zápis:

$$k_1 = k_2 \; [2], r = 3\,\text{cm}, l \approx 18{,}85\,\text{cm},$$
$$|AB| \approx 18{,}85\,\text{cm} \; [3], |BC| = v = 6\,\text{cm},$$
$$S = 2 \cdot (\text{obsah kruhu}) + \text{obsah obdélníku } ABCD,$$
$$S = 2 \cdot (\pi r^2) + l \cdot v = 2 \cdot \pi r^2 + 2 \cdot \pi\, r\, v.$$

Pod znakem l je znak $2\pi r$ propojen rovnítkem ve svislé poloze [4]. Vše je napsáno úhledně, tužkou.



Žáci nalezli hledaný vzorec, ale ani model válce, ani konkrétní výpočet neudělali. Až na přímou výzvu učitelky tyto pro ně „podřadné" věci dodělali. Model vytvořili z barevného papíru podle zvolených čísel a konkrétní výpočet na poslední řádek bílého papíru zapsali perem:

$$S = 2 \cdot \pi 3^2 + 2 \cdot \pi 3 \cdot 6 \approx 56{,}548\,67 + 113{,}097 = 196{,}646\,\text{cm}^2.$$

Síť byla udělána pěkně.

Komentář: Jak bylo uvedeno v poznámce pod čarou, některé z bodů komentáře se vztahují ke konkrétním krokům v postupu. V tomto případě jde o body 1 – 4. Další body komentáře nemají tak přesnou lokalizaci a vztahují se k větším celkům, nebo k celému procesu.

1. Termínem *kruh/kružnice* označujeme synkretickou představu žáků, ve které oba pojmy, kruh i kružnice, nejsou dostatečně odlišeny označením. V předcházejících hodinách jsme důsledně rozlišovali mezi kružnicí značenou malým písmenem k a kruhem, značeným velkým K.

2. Shodnost kruhů zapsali nekorektně, ale naprosto srozumitelně $k_1 = k_2$.

3. Zajímavý je jejich způsob záznamu nejnáročnější myšlenky postupu, totiž toho, že obvod kruhu a délka obdélníku $ABCD$ jsou stejné: $l \approx 18{,}85\,\text{cm}$, $|AB| \approx 18{,}85\,\text{cm}$. Důsledně vzato, z těchto vztahů rovnost $l = |AB|$ neplyne. Ale hoši to uvedeným způsobem zřejmě chápali.

4. Nejzajímavější částí postupu je to, že vzorec je nejprve formulován slovně, a teprve pak jsou místo slov použity příslušné znaky. To přesně odpovídá konstruktivistickému procesu objevování, který lze zapsat jako posloupnost:
poznání v činnosti $\rightarrow$ vytvoření představy $\rightarrow$ poznání ve slovech $\rightarrow$ znakový zápis (*)
V uvedeném případě je názorně ilustrována právě poslední šipka tohoto procesu.

5. Vyvozování vzorce je na bílém papíru, avšak podrobnější vysvětlení postupu, které tam mělo podle instrukce učitelky být, chybí. Oba žáci se zřejmě domnívali, že jejich zápis je zcela jasný.

6. Ze záznamů je jasné, jak k objevu došlo. Je pravděpodobné, že oba žáci měli ve své představě příslušné schéma sítě i způsobu tvorby vzorce téměř okamžitě. Svou představu přehledně formulovali zápisem.

7. Oběma žákům se nelíbilo, že je učitelka žádala, aby vytvořili model a udělali numerický výpočet, protože tuto činnost považovali za podřadnou. Asi by bylo bývalo vhodnější požádat je, aby řešili náročnější úkol. Například, aby našli rozměry válce, jehož povrch je 200 cm^2, nebo aby sestrojili síť komolého kužele.

Skupina č. 2 – čtyři dívky, Klára má dobrou prostorovou představivost, další tři dívky jsou zaměřeny spíše na jazyky; všechno „svědomité studentky".

Sociální klima: Dobrá spolupráce všech dívek.

Postup: Kopie žákovského řešení skupiny č.2 – viz obr. 2.

Na barevný papír Klára napsala *náčrt*, k němu nakreslila obrázek válce a od obou jeho podstav čárky k nápisu $S = \pi r^2 \cdot 2$ {$= 36\,\mathrm{cm}^3 +$ [1].

Tento obrázek je v pravé horní části a v levé části, ve třech oddílech pod sebou jsou následující nápisy:

První oddíl: $r$podstavy $= 3\ cm, l = 2\pi r, l \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3, l = \underline{18{,}84\,\mathrm{cm}^2}$

Druhý oddíl: $S = \pi{\cdot}r^2, S = 3{,}14{\cdot}3^2, S = 28{,}26\,\mathrm{cm}^2 = 1$ podstava $\Rightarrow \Rightarrow 28{,}26 \cdot 2 = 56{,}52\,\mathrm{cm}^2$

Třetí oddíl: $\{= 56{,}52\,\mathrm{cm}^2\}S = a \cdot b, = 5 \cdot 18{,}84, 94{,}2\ \mathrm{cm}^2, \Rightarrow \Rightarrow 56{,}52 + 94{,}2 \approx \underline{150{,}72}\,\mathrm{cm}^2$

Poslední, čtvrtý řádek je od třetího mírně odsazen a zdá se, že tvoří samostatný oddíl.

Na bílém papíru je perem napsán následující text: *Bez náčrtku sítě válce jsme odvodili vzoreček:*

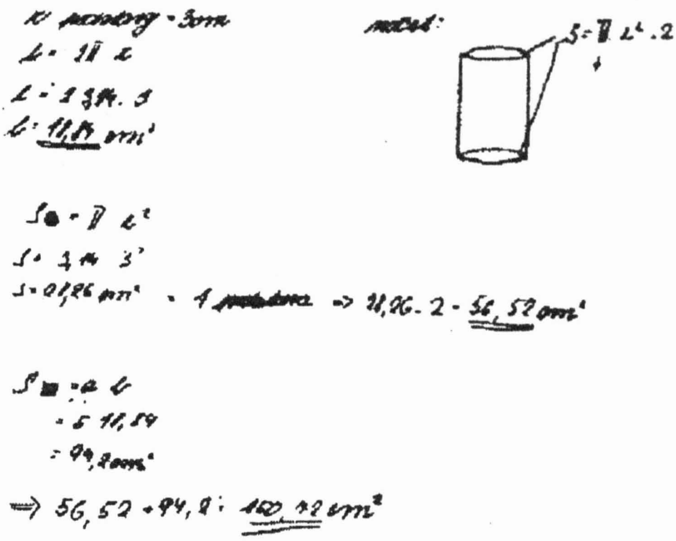
$$2 \cdot \text{obsah kruhu} + \text{obsah obdélníku}$$

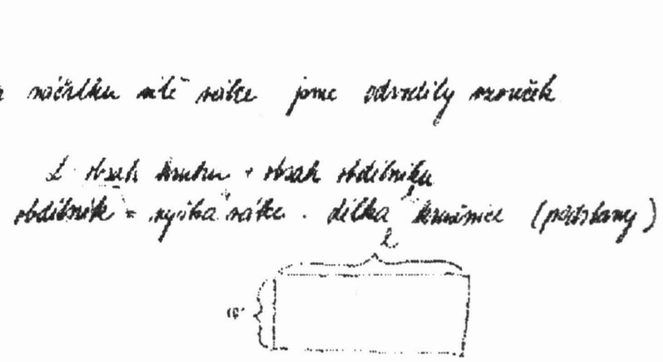
$$\text{obdélník} = \text{výška válce} \cdot \text{délka kružnice (podstavy)}\ [7].$$

V poslední řádce je slovo „obdélník" napsáno na přelepce. Pod ní bylo slovo válec.

Pod ním je tužkou nakreslen obrázek obdélníku a připsána písmena l – k délce a v – k šířce.

Přiložen je správný model sítě. Oba papíry, barevný i bílý, stejně i model sítě jsou v pravém horním rohu podepsány čtveřicí příjmení. Pořadí příjmení na každém papíru je odlišné. Na prvním místě se postupně všechny dívky vystřídaly, na modelu jsou na prvním místě uvedena dvě příjmení. Vše je provedeno krasopisně a úhledně.





Nejprve byl náčrt válce. U něj dívky zjistily obsah podstavných kruhů a chtěly přičíst obsah pláště (o tom vypovídá znak „+“ pod nápisem $S =$). Je pravděpodobné, že již v tomto okamžiku bylo dívkám jasné, že plášť válce bude obdélník, ale nevěděly jak to napsat [1], proto si řekly , že to zjistí a dodatečně dopíší. Na dodatečné dopsání již ale zapomněly.

K výpočtu obsahu obdélníku je nutno znát jeho rozměry. Jeden z nich (výška) je možno volit, ale druhý je dán poloměrem podstavného kruhu. Dívky nejprve volí $r = 3$ cm, najdou l (první oddíl, první myšlenka) [2]. Dále vypočítají obsah podstavného kruhu a získané číslo zdvojnásobí, aniž by slovně uvedly jeho význam. [3]

Nejzajímavější je oddíl třetí, ve kterém dochází k výpočtu obsahu pláště, tedy obdélníka, resp. pláště/obdélníka [4]. Zde je uveden nejprve „tabulkový“ vzoreček $S = a \cdot b$. [5] Druhá pozoruhodnost třetího oddílu spočívá v tom, že výška v je přímo uvedena číslem 5 a nikde není ani zmínka o tom, že číslo 5 je výška [6]. Lze to pouze odměřit z modelu.

Komentář :

1. Dívky nepovažovaly za rozumné do nápisu dopsat „ + obsah obdélníku“, protože by zde došlo ke konfliktu dvou jazyků – znakového a slovního. Proto se rozhodly nejprve najít znakové vyjádření.

2. Z toho, že první výpočet není věnován obsahu kruhu, usuzujeme, že v dané chvíli jako naléhavější v myslích dívek byla myšlenka obsahu obdélníka/pláště válce, pro kterou je rozhodující jeho rozměr.

3. Zdá se, že význam zdvojnásobení se jevil dívkám jasný ze dvou indicií: z obrázku trochu výše a z předchozího zápisu „1 podstava“.

4. Vyjádřením *obsahu pláště = obdélníka* rozumíme představu, která má procesní charakter a přenáší představu pláště na představu obdélníka. Vyjádřením *obsahu pláště/obdélníka* rozumíme představu, která má statický, konceptuální charakter a je spojením jak pláště, tak obdélníka. Podobné představy nacházíme v mnoha oblastech matematiky (a nejen matematiky). Například pro nás jsou znaky $0,5$ a $1/2$ spojeny. Pro žáka třetího ročníku to je pouze dvoj-představa. Tedy ve vědomí dítěte je představa „$0,5 = 1/2$“, ale v našem je to „$0,5/1/2$“ .

5. Tabulkový vzoreček byl v úvodu každého oddílu, jenže v obou předchozích byl význam použitých znaků π, r, l v souladu se značením válce. Zde dochází k možnému šumu, neboť mezi písmeny a, b a obrázkem není žádné propojení.

6. Z vysvětlení na bílém papíru vyplývá, že dívky objevily propojení mezi rozměry obdélníka a rozměry válce (výška a obvod podstavného kruhu). Slovní vysvětlení je doplněno náčrtem obdélníku s označením rozměrů písmeny v a l. Dále z uvedeného dosazení čísla 5 plyne, že v představě dívek, nebo přinejmenším té, která to píše, je spojení a/v. To tedy naznačuje, že otázka položená v předchozí poznámce je řešena v prospěch konceptu „obsahu pláště/obdélníka".

7. Toto vysvětlení opět odpovídá postupu (*). Hlavní důraz je na slovním uchopení celé situace, nikoli na uchopení symbolickém. Výsledný „vzoreček" je napsán ve dvou řádcích. V prvním je uvedeno, ze kterých částí se obsah skládá, ve druhém pak jak se vypočte druhá část tohoto součtu. Z uchopení dívek vidíme, že první část – obsah dvou kruhů – je snadná, protože je přímo propojena na známý vzoreček. Druhá část je náročná, protože je jí věnován zvláštní řádek.

Analýza práce dalších 6 skupin je neméně zajímavá, jako byly ty dvě, které jsme uvedli. Poučné byly chyby, které se v práci skupin objevily: záměna pojmů i znaků poloměru a průměru, vystřižení nerealizovatelné sítě,.... Žel omezený prostor příspěvku nedovoluje tyto případy podrobněji rozvádět.

Závěr

Zkušenost z tohoto experimentu mne vede k zamyšlení, zda děláme dobře, když žákům předkládáme vzoreček ve tvaru $S = 2\pi r(r + v)$. Žádná z osmi skupin k tomuto zápisu nedospěla, ale ve všech (kromě jedné) byl vzoreček napsán jako součet dvou objektů. Tak jej děti konstruovaly a tak je jim srozumitelný. Vzoreček uvedený nahoře zdokonaluje výsledný poznatek po formální stránce ale současně „umrtvuje" význam jednotlivých znaků ve vzorci vystupujících.

Když jsem nad tímto jevem uvažovala, napadlo mě zadat žákům následující úlohu: Nalezněte geometrický útvar, který je modelem vzorce ve tvaru $S = 2\pi r(r + v)$. Modelováním ukažte, že obsah tohoto útvaru je shodný s obsahem povrchu válce vyjádřeného vzorcem $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$.

Metodologický pohled na to, co bylo řečeno, ukazuje, jak mohou algebra s geometrií spolupracovat. Vzoreček $S = 2\pi r(r + v)$, ke kterému jsme dospěli algebraickou úpravou, nás nabádal k hledání takového stříhání daného geometrického objektu, který by tomuto vzorečku odpovídal.

Při přípravě i realizaci uvedeného experimentu jsem prožívala mnoho hezkých chvil a po hodině jsem měla skvělý pocit, který je nám učitelům občas osudem dopřán. Při analýzách experimentálních materiálů jsem bohatě využívala metodické postupy popsané v knize Hejný–Michalcová 2001. Jsem ráda, že jsem měla možnost i osobně konzultovat s M. Hejným a chtěla bych mu poděkovat za jeho rady a připomínky.

Literatura

[1] Hejný, M., Michalcová, A., *Skúmanie matematického riešitel'ského postupu*, Metodické centrum v Bratislavě, Bratislava, 2001.

[2] Hejný, M., Kuřina, F., *Dítě, škola a matematika*, Portál, Praha, 2001.

[3] Hejný, M., Jirotková, D., *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou*, UK PF, Praha, 1999.

Mgr. Jana Hanušová
Gymnázium Mnichovo Hradiště
e-mail: hanusovaj@atlas.cz