Učitel matematiky

Jaroslav Hora; Pavel Pech

Využití programu QUPCAD při řešení středoškolských úloh obsahujících parametry

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 1, 31–38

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150813`

VYUŽITÍ PROGRAMU QEPCAD PŘI ŘEŠENÍ STŘEDOŠKOLSKÝCH ÚLOH OBSAHUJÍCÍCH PARAMETRY

Jaroslav Hora, Pavel Pech

Cílem tohoto textu je předložit zcela netradiční pohled na řešení jednodušších rovnic a nerovnic s parametry či jejich soustav. V dnešní počítačové éře nepřekvapí, že při řešení těchto problémů můžeme mít výkonného rádce či kontrolora našich výsledků. Lze jej získat zdarma z Internetu a v daném případě máme na mysli počítačový program QEPCAD. Náš přístup bude zcela prakticistní: poskytneme informace o instalaci programu a ukázky výsledků jeho práce. Tím se zájemcům usnadní možnost pro experimentování s tímto programem. Teoretické otázky typu „Jak to funguje? Jaký algoritmus to využívá?" nebudeme na tomto místě řešit – jde o záležitosti, které by si vyžádaly samostatný text.

Program QEPCAD byl vytvořen Hoon Hongem, ale k jeho zdokonalení přispělo i několik dalších badatelů včetně doc. R. Lisky z FJFI ČVUT Praha. Zásluhou prof. Christophera W. Browna nalezne zájemce bohatou dokumentaci o tomto programu na adrese *http://www.cs.usna.edu/~qepcad/B/QEPCAD.html*.

QEPCAD bude snadno dostupný těm, kteří pracují s operačním systémem Linux. I tento operační systém lze získat zdarma z Internetu a je velice stabilní a spolehlivý. Nicméně větší část případných zájemců o QEPCAD zřejmě pracuje pod Windows. V tomto případě lze vyhradit část prostoru na pevném disku vašeho počítače pro Linux a získat tak možnost pracovat s oběma operačními systémy. Takovéto nainstalování Linuxu je ovšem komplikovaná práce, se kterou by měl pomoci někdo zkušený.

Na internetovské stránce nazvané Downloading and Installing QEPCAD získáme návod, jak učinit zmíněný program „provozuschopným" pod Linuxem. Pak již můžeme začít s testováním.

Program QEPCAD umožňuje najít k dané formuli obsahující kvantifikátory ekvivalentní otevřenou formuli. Můžeme tedy kupř. získat „počítačový“ důkaz následující velice dobře známé věty.

Věta: Normovaná kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má reálný kořen právě tehdy, když $p^2 - 4q \geq 0$.

Tedy formálně zapsáno:

$$(\exists x)\ [x^2 + px + q = 0] \Leftrightarrow p^2 - 4q \geq 0.$$

O programu QEPCAD můžeme získat mnoho dalších informací, kupř. o zadávání formulí z webovské stránky QEPCAD – Entering Formulas. Snad ale budou k užitku i následující komentáře.

Běží-li nám již QEPCAD, je dobré nejprve napsat do lomených závorek název řešeného problému, kupř. [kvadr. rovnice] odešleme klávesou Enter. Pak jsme vyzváni k zapsání seznamu proměnných, které se v námi zadané formuli budou vyskytovat. Přitom se do kulatých závorek nejprve zapíší všechny volné proměnné:

$$(p, q, x)$$

Dále zadáme počet volných proměnných. Ve formuli, kterou se chystáme zapsat, jsou jimi p, q, tedy dvě proměnné.

$$2$$

Zadáme příslušnou kvantifikátory obsahující formuli:

$$(Ex)[x^2 + px + q = 0].$$

(Povšimněme si, že existenční kvantifikátor se v QEPCADu zapisuje písmenem E, že kvantifikátory neobsahující podformule je zapsána v lomených závorkách a že na konci zadání je nutno napsat tečku. Opět, jako vždy, vše odešleme klávesou Enter.)

Pro jednoduchost na další tři požadované údaje reagujeme jen zápisem *go* opět následovaným klávesou Enter.

Na *Before solution ¿* však doplňme *solution-extension T*. Po stisku Enter uvidíme následující výstup:

```
                Quantifier Elimination
                          in
          Elementary Algebra and Geometry
                          by
     Partial Cylindrical Algebraic Decomposition

              Version B.1.8, 14 Jan 2003

                          by
                      Hoon Hong
                (hhong@math.ncsu.edu)

With contributions by: Christopher W. Brown, George E.
Collins, Mark J. Encarnacion, Jeremy R. Johnson
Werner Krandick, Richard Liska, Scott McCallum,
Nicolas Robidoux, and Stanly Steinberg
======================================================
Enter an informal description  between '[' and ']':
[kvadr.rovnice]
Enter a variable list:
(p,q,x)
Enter the number of free variables:
2
Enter a prenex formula:
(Ex) [x^2 + p x + q = 0].
======================================================
Before Normalization >
go
Before Projection >
go
Before Choice >
go
Before Solution >
solution-extension T
An equivalent quantifier-free formula:
4 q - p^2 <= 0
```

Nedostali jsme námi očekávanou otevřenou formuli $p^2-4q \geq 0$, ale jinou rozumnou odpověď. Můžeme se zamyslet i nad tím, že některé středoškolské odpovědi mají „zvykový" charakter.

Příklad 1 (viz [1])
Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž má rovnice

$$x^2 + 2(p-4)x + p^2 + 6p = 0 \tag{1}$$

a) alespoň jeden reálný kořen,

b) dva reálné kořeny, které jsou oba kladné,

c) dva reálné kořeny, které jsou oba záporné,

d) dva reálné kořeny, z nichž jeden je kladný a jeden záporný.

Vyřešit tento příklad „klasickými školními" metodami je užitečným cvičením. Sbírka [1] obsahuje rovněž „klasické" řešení tohoto příkladu. V každém případě zjistíme, že

a) daná rovnice má alespoň jeden reálný kořen pro $p \leq \frac{8}{7}$,

b) dva kladné reálné kořeny má rovnice (1) pro

$$p \in (-\infty, -6) \cup (0, \frac{8}{7}),$$

c) rovnice (1) nemá dva záporné reálné kořeny pro žádné $p \in \mathbb{R}$,

d) rovnice (1) má jeden kladný a jeden záporný kořen pro všechna $p \in (-6, 0)$.

Vyřešme nyní úkoly a) – d) pomocí programu QEPCAD.

a) Zadejme formuli

$$(\exists x)\ [x^2 + 2(p-4)x + p^2 + 6p = 0].$$

Jak je patrné z připojeného protokolu, obdržíme ekvivalentní otevřenou formuli $7p - 8 \leq 0$, tj. vskutku $p \leq \frac{8}{7}$.

```
=====================================================================
Enter an informal description  between '[' and ']':
[pokus]
Enter a variable list:
(p,x)
Enter the number of free variables:
1
Enter a prenex formula:
(Ex) [x^2 + 2 ( p - 4) x + p^2 + 6 p = 0].

=====================================================================


Before Normalization >
go
Before Projection (x) >
go
Before Choice >
go
Before Solution >
solution-extension T
An equivalent quantifier-free formula:
7 p - 8 <= 0
```

b) Nyní zadejme formuli

$$(\exists a)\,(\exists b)\ [a^2+2(p-4)a+p^2+6p=0\ \wedge \\ \wedge\ b^2+2(p-4)b+p^2+6p=0\ \wedge \\ \wedge\ a\neq b\ \wedge\ a>0\ \wedge\ b>0].$$

V QEPCADu zapíšeme

```
(Ea) (Eb) [ a^2 + 2 (p - 4) a + p^2 + 6 p =0 /\ b^2 +
2(p-4) b + p^2 + 6p = 0 /\ a /= b /\  a>0 /\ b>0].
```

Obdržíme

```
An equivalent quantifier-free formula:
7 p - 8 < 0 /\ p + 6 /= 0 /\ p /= 0 /\ [ p >= 0 \/ p +
6 <= 0 ]
```

Zjistit, že tato formule platí právě tehdy, když
$$p \in (-\infty, -6) \cup (0, \tfrac{8}{7}),$$
je již snadné.

c) Teď zadejme formuli

$$(\exists a)\,(\exists b)\;[a^2 + 2(p-4)a + p^2 + 6p = 0 \;\wedge$$
$$\wedge\; b^2 + 2(p-4)b + p^2 + 6p = 0 \;\wedge$$
$$\wedge\; a \neq b \;\wedge\; a < 0 \;\wedge\; b < 0].$$

V QEPCADu pišme

```
(Ea)(Eb) [ a^2 + 2(p - 4) a + p^2 + 6 p = 0 /\ b^2 +
2 (p - 4) b + p^2 + 6 p = 0 /\ a/=b /\ a<0 /\ b<0].
```

Dostaneme

```
An equivalent quantifier-free formula:
FALSE
```

Tato odpověď znamená, že pro žádnou hodnotu parametru p nemá rovnice (1) dva záporné kořeny.

d) Nyní zapišme formuli

$$(\exists a)\,(\exists b)\;[a^2 + 2(p-4)a + p^2 + 6p = 0 \;\wedge$$
$$\wedge\; b^2 + 2(p-4)b + p^2 + 6p = 0 \;\wedge\; a \cdot b < 0].$$

V QEPCADu obdržíme (zkráceno):

```
(Ea)(Eb) [a^2 + 2 (p - 4) a + p^2 + 6 p = 0 /\ b^2 +
2 (p - 4) b + p^2 + 6 p = 0 /\ a b< 0 ].
```

```
An equivalent quantifier-free formula:
p + 6 > 0 /\ p < 0
```

Vidíme, že rovnice (1) má jeden kladný a jeden záporný kořen právě tehdy, když pro parametr p platí $p \in (-6, 0)$.

Příklad 2
Určete, pro které reálné hodnoty parametru a má v $\mathbb{R}^2$ soustava rovnic

$$ax - 2y = 3$$
$$3x + ay = 4$$

obor pravdivosti $P = \{[x, y],\text{ kde } x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$.

```
Enter a prenex formula:
(Ex)(Ey) [a x- 2 y=3 /\ 3 x+ a y=4 /\ x > 0 /\ y > 0].

=======================================================

Before Normalization >
go
Before Projection (y) >
go
Before Choice >
go
Before Solution >
solution-extension T
An equivalent quantifier-free formula:
4 a - 9 > 0
```

Vidíme, že zadaná soustava má obor pravdivosti

$$P = \{[x, y],\text{ kde } x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$$

právě tehdy, když $a \in (\frac{9}{4}, \infty)$.

Závěrem upozorněme na to, že existuje souvislost mezi eliminací kvantifikátorů a starší teorií eliminace v klasické algebře, nyní oživenou studiem Gröbnerových bází. O těchto záležitostech více ve [3].

Literatura

[1] Bušek, I., *Řešené maturitní úlohy z matematiky*, Prometheus, Praha, 1999.

[2] Winkler, F., *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*, Springer Verlag, Wien, 1996.

[3] Ernestová, M., Soustavy algebraických rovnic, *Učitel matematiky* **10**(4), 2002, 193–208.

RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
Katedra matematiky FPE ZČU,
Klatovská 51
320 13 Plzeň
e-mail: horajar@kmt.zcu.cz

Doc. RNDr. Pavel Pech, CSc.
Katedra matematiky PF JČU,
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: pec@pf.jcu.cz