Milan Hejný; Marie Tichá

Matematické příběhy (7): Příběh sedmý. Kde ten Francouz ztroskotal?

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 1, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150802

MATEMATICKÉ PŘÍBĚHY[1] (7)

Příběh sedmý

KDE TEN FRANCOUZ ZTROSKOTAL?

MILAN HEJNÝ, MARIE TICHÁ

Strýc Václav prožil celý život na lodích, které křižovaly moře a oceány. Ze života na moři si do svého domku pod lesem donesl kolébavou chůzi, na předloktí vytetovanou kotvu a spoustu neuvěřitelných příhod.

Matěj s Filipem si hověli na koberci a strýc Václav, sedě v houpacím křesle, vzpomínal.

„Za války smrt kosila lidi stejně nemilosrdně na zemi, ve vzduchu i na moři. Sloužil jsem na minolovce Odysseus, rychlé malé lodi s na tu dobu nejmodernější technikou pro boj proti ponorkám a minám. Do přímé bitvy se nehodila, a proto zpravidla jen doprovázela větší lodě nebo celé konvoje. Jednou ale musela proplout z Gibraltaru na Maltu bez doprovodu. Moře bylo klidné a noc naštěstí ne příliš jasná. Odysseus rychle a tiše klouzal po vlnách. Přístroje, které číhaly na všechno, co by mohlo ohrozit naši bezpečnost, zůstávaly stále němé. Pospíchali jsme. A i když to nikdo nevyslovil, všichni jsme se báli, že nás nějaký ten fašistický žralok zpozoruje. Byli jsme snadná, téměř bezbranná kořist.

Mohlo to být tak hodinu před svítáním, když se detektory ozvaly. Pátračův hlas v kapitánově telefonu hlásil: „Malý kovový předmět na hladině, kurz 22,31, vzdálenost 230.“ „Poplach! Mina!“ rázně zavelel kapitán. Pokojná paluba se za pár vteřin změnila v mraveniště. Avšak i ve zdánlivém zmatku plnila sehraná a ostřílená posádka své úkoly přesně a bezchybně. Mina nikoho nevyplašila, dokonce jsme byli rádi, že je nějaká práce. S minami jsme si věděli rady, ale malý křižník byl nám byl nahnal strachu až-až.

---

[1] Článek byl napsán s podporou grantu GAČR 406/02/0829. Upraveno podle stejnojmenného příběhu knížky M. Hejný, Ľ. Niepel: Šestnásť matematických príbehov, SNP, Bratislava 1983.

Loď se mírně pootočila a zpomalila. Několik mužů na můstku pročesávalo dalekohledem i pouhým okem hladinu v místě, které pátrač upřesňoval každých 10 sekund: „vzdálenost 150 – vzdálenost 130 – vzdálenost 111 – vzdálenost 92 ....“ „Vidím!“ zvolal najednou jeden z námořníků. Trojice lovců se připravila na výlov, protože jsme se báli minu odstřelit, abychom nepřivábili pozornost nepřítele.

Nakládání smrtky, jak jsme pokřtili riskantní výlov „živé“ miny, bylo vždy napínavé a vyžadovalo maximální soustředění celé posádky. Ale naše lovecká tria byla vynikající. I tentokrát se akce zdařila, přestože mina byla na první pohled zcela odlišná od těch, se kterými jsme už měli tu čest se seznámit. Až když už neškodně ležela na operačním stole, zjistili jsme, že to vlastně vůbec není mina, ale dělová nábojnice ze staré pětaosmdesátky, zazátkovaná velkým kusem korku a hadrem. Nechápavě jsme zírali na naši trofej. Jeden z námořníků to komentoval tak, že nám asi nějaký umírající pirát poslal souřadnice místa, na kterém je ukrytý poklad.

Představte si, chlapci, že se tato předpověď téměř vyplnila. V nábojnici byl kus papíru se špatně čitelným písmem. Pisatelem byl jakýsi francouzský důstojník, který i s tajnými dokumenty ztroskotal na ostrově obsazeném fašisty. A nyní se ukrývá v jeskyni, kterou do mořského útesu vykotlalo střídání přílivu a odlivu. O poloze ostrova se však v dopise nepsalo. Nakonec jsme v nábojnici našli ještě malý lísteček se zašifrovaným textem a domysleli jsme si, že to asi budou souřadnice ostrova. Všichni jsme se pustili do luštění. Každý z nás si nejprve přepsal obsah z chatrného originálu na zvláštní papír a já jsem si ho dokonce přeložil do češtiny.“

Strýc Václav vstal a ze staromódního psacího stolu vyndal malou krabičku a z ní kus papíru s těžce čitelným vzkazem. Vzkaz byl na vedlejším papíře přepsán:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n : 3 & \text{je-li možné } a_n \text{ dělit třemi beze zbytku} \\ \langle 1.73 \times a_n \rangle & \text{není-li možné } a_n \text{ dělit třemi} \end{cases}$$

Délka	$(a_7)^\circ(a_{22})'$	přičemž $a_1 = 73$
Šířka	$(a_{219})^\circ$	přičemž $a_1 = 69$
	$(a_{147})'$	přičemž $a_1 = 57$

„Dodnes ten kousek papíru schovávám spolu s jiným důležitým dokumentem. Jestli se vám podaří text dešifrovat, ukážu vám i druhý dokument."

„Strýčku Václave, a tys ho snad tehdy vyluštil?" ozval se potouchle Matěj.

„Vyřešili jsme to společně. Celá posádka přemýšlela, byli jsme doopravdy námořní elita, otevřené hlavy! Na Odysseovi žádný ťulpas nemohl sloužit!" hrdě řekl strýc Václav.

Chlapci se zadívali na lístek. Nejprve to zapálilo Filipovi.

„Jestli tomu rozumím, tak délka znamená zeměpisnou délku a šířka zeměpisnou šířku. Pak je jasné, že číslo a_7 určuje stupně a číslo a_{22} minuty zeměpisné délky."

„Souhlasím!" přikývl Matěj a dodal: „A tady nahoře je předpis, který nám pomůže čísla a_7 a a_{22} najít. Podívej, tady je napsáno, že $a_1 = 73$. Číslo a_2 vypočítáme podle návodu, když si řekneme, že $n = 1$. Pak bude:"

$$a_{n+1} = \begin{cases} 73 : 3 & \text{jestliže je číslo } a_1 = 73 \text{ dělitelné číslem 3} \\ 1.73 \times 73 & \text{jestliže 73 není dělitelné číslem 3."} \end{cases}$$

„Protože se 73 číslem 3 nedá dělit, tedy nedá dělit beze zbytku, je třeba postupovat podle druhého řádku a vynásobit 1,73 × 73. Výsledek bude 126,29," oznámil po chvíli počítáni Filip.

„Strýčku Václave, jak to, že nám nevyšlo celé číslo? Vždyť jestliže je $a_2 = 126{,}29$, jak určíme, zda je dělitelné třemi? Tam musí vždycky být něco za desetinnou čárkou. Já tomu nerozumím."

„Ani my jsme tomu nerozuměli. Začali jsme kontrolovat, zda jsme při přepisování něco nepopletli. A skutečně jsme zjistili, že jsme na něco zapomněli, stejně jako vy teď."

„Zapomněli?" podivil se Matěj. „Vždyť ..."

„Možná, že tady na tu špičatou závorku!"

„To je ono! A protože byste možná dva dny dumali nad tím, co ta závorka znamená, prozradím vám, co jsme po mnoha pokusech vymysleli; že číslo v závorce má být zaokrouhlené na celé. Tedy $\langle 126{,}29 \rangle = 126$."

„Hurá! A do toho!" zakřičel Filip.

Teď už šlo počítání chlapcům docela hladce. Protože číslo $a_2 = 126$ je dělitelné číslem 3, bude $a_3 = 126 : 3 = 42$. Také číslo 42 je dělitelné třemi, proto bude $a_4 = 42 : 3 = 14$. Protože $a_4 = 14$ není dělitelné číslem 3, bude $a_5 = \langle 1{,}73 \times 14 \rangle = \langle 24{,}22 \rangle = 24$. Podobně vypočítali $a_6 = 8$, $a_7 = 14$, $a_8 = 24$, $a_9 = 8$, $a_{10} = 14$.

„Zadrž!" zvolal Filip. „Dál už není potřeba počítat. Všimni si, že čísla 8, 14, 24 se opakují. Každé třetí číslo je 8. Jsou to čísla $a_6, a_9, a_{12}, a_{15}, a_{18}, a_{21}, \ldots$. A tak víme i bez dalšího počítání, že hledané a_{22} je 14."

„Takže známe zeměpisnou šířku; 14°14′. Strýčku Václave, půjčte nám atlas," prosili.

Na mapě Středozemního moře chlapci zjistili, že příslušný poledník prochází v těsné blízkosti Neapole. Potom se pustili do výpočtu zeměpisné šířky. Matěj počítal stupně, Filip minuty. Matěj (když taktně zamlčíme několik chyb a následných oprav, které udělal) našel tuto posloupnost: $a_1 = 69$, $a_2 = 23$, $a_3 = 40$, $a_4 = 69$, $a_5 = 23, \ldots$. Zjistil tedy, že se opakují čísla 69, 23, 40. Proto $a_{219} = 40$.

Podobně Filip správně vypočítal minuty zeměpisné šířky. Nakonec se chlapcům podařilo podle souřadnic určit ostrov, na kterém Francouz ztroskotal.

„Slíbil jsem vám, že jestliže ostrov najdete, ukážu vám i druhý dokument, který skrývá moje krabička. Tak se tedy podívejte!" a strýc Václav vytáhnul jako svátost zežloutlý list papíru popsaný drobným úhledným písmem.

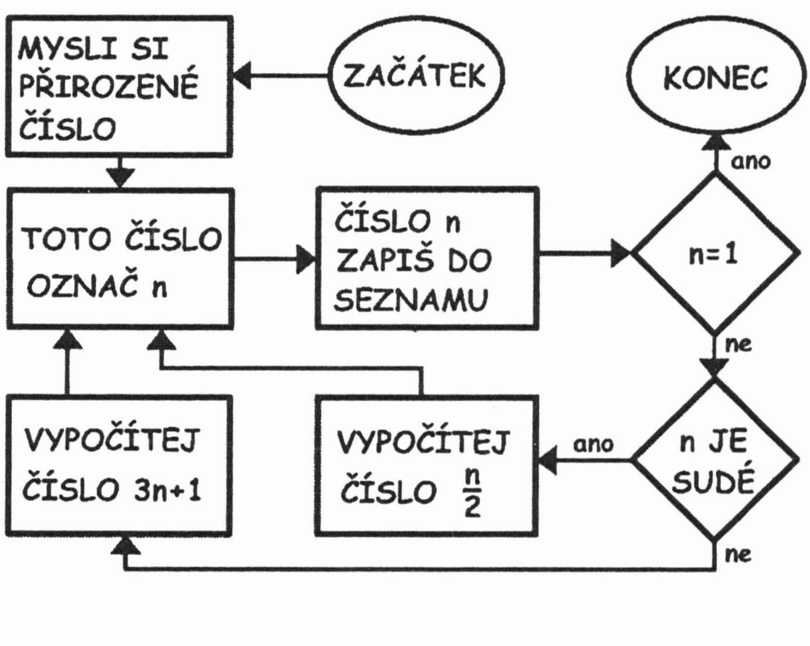
„Od koho je ten dopis?" vyzvídali chlapci.

„Hned se to dovíte. Šťastně jsme dorazili na Maltu a ihned byla vyslána ponorka, aby zachránila francouzského důstojníka. Vyfoukla ho i s tajnými dokumenty fašistům rovnou pod nosem. Nikdy jsem toho člověka neviděl. Ale dlouho po válce, až v lednu čtyřicátého šestého, jsem prostřednictvím Červeného kříže dostal tento dopis. Psal ho bretaňský rolník, otec pěti dětí, kterého válka vyhnala do příbojem vyhloubené jeskyně. Za války jsem dostal hodně vyznamenání a byl jsem na ně hrdý, ale čím jsem starší, tím více si vážím tohoto vyznamenání – děkovného dopisu. Přispěl jsem k záchraně člověka."

Strýčkův příběh na chlapce silně zapůsobil. Zatoužili, aby i oni mohli přispět k záchraně člověka. Protože ale momentálně žádná vhodná příležitost nebyla v dohledu, rozhodli se aspoň si zahrát na ztroskotance a zachránce. První najde na mapě nějaké pěkné místo pro ztroskotání, zašifruje ho a druhý ztroskotance hledá.

A nyní si něco řekneme o šifrování a dešifrování ztroskotancova lístku. Způsob zadání posloupnosti čísel a_1, a_2, a_3 , ..., kterou námořník zašifroval svoji polohu, se nazývá *rekurentní*: následující člen posloupnosti se určí pomocí předcházejícího. Jestliže si vzpomenete na Pascalův trojúhelník, jistě vás napadne, že i tam se následující řádek počítal pomocí předcházejícího.

V dnešní matematice se rekurentní posloupnosti často počítají na počítačích. Základní schéma, s jehož pomocí se posloupnost převádí do řeči počítače, se nazývá *vývojový diagram*. Jeden vidíte na obrázku!



Zahrajte si na počítač. Zvolte si přirozené číslo a dělejte s ním to, co přikazuje obrázek. Řekněme, že jste si zvolili číslo 15. Nejprve zapíšete 15 do seznamu. Protože n je 15, jdete po šipce dolů a ptáte se, zda je 15 sudé. Protože není, vypočítáte $3 \times 15 + 1 = 46$. Toto číslo zapíšete do seznamu (za číslo 15) a pokračujete. Vidíte, že $46 \not= 1$ a je sudé. Vypočítáte $46 : 2 = 23$. Číslo 23 zapíšete do seznamu za 46 a tak dále. Postupně dostanete zápis posloupnosti: 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Po 18 krocích jste skončili, protože jste došli k číslu 1.

Vývojový diagram, který jsme vám ukázali, je víc než jeden z příkladů. Je to proslavená, dodnes nerozřešená úloha. Není totiž známo, zda existuje takové přirozené číslo, které po vložení do našeho vývojového diagramu dá nekonečnou posloupnost, tedy takovou, která nikdy neskončí v 1.

A je čas pustit se do úloh. Ale teď si uvědomujeme, nezapomněli jsme odpovědět na úlohu z názvu příběhu – kde vlastně ten Francouz ztroskotal?

Poznámka. Připomeneme, že jestliže x je reálné číslo, pak největší celé číslo, menší nebo rovné číslu x, označujeme $\langle x \rangle$ a nazýváme „celá část čísla x“.

Úloha 1. V posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ najděte člen a_{22}, jestliže víte, že $a_1 = 13$ a

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{3} & \text{když číslo 3 dělí } a_n \\ a_n + 5 & \text{když číslo 3 nedělí } a_n \end{cases}$$

Úloha 2. V posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ najděte člen a_{150}, jestliže víte, že $a_1 = 23$ a

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{3} & \text{když 3 dělí } a_n \\ \frac{a_n}{2} & \text{když 3 nedělí } a_n\text{, ale dělí ho číslo 2} \\ a_n + 7 & \text{když ani číslo 3 ani 2 nedělí } a_n \end{cases}$$

Úloha 3. V posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ najděte člen a_{123}, jestliže víte, že $a_1 = 5$, $a_2 = 17$ a

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{3} & \text{když číslo 3 dělí } a_n \\ a_n + a_{n-1} & \text{když číslo 3 nedělí } a_n \end{cases}$$

Úloha 4. Najděte čísla a_1, a_2 $\in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ tak, aby se posloupnost a_1, a_2, a_3, ... daná předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{když číslo 2 dělí } a_n \\ a_n + a_{n-1} & \text{když číslo 2 nedělí } a_n \end{cases}$$

zacyklila co nejpozději.

Úloha 5. V posloupnosti a_1, a_2, a_3, ... najděte člen a_{138}, jestliže víte, že $a_1 = 31$ a

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{3} & \text{když číslo 3 dělí } a_n \\ \langle 1{,}73 \times a_n \rangle & \text{když číslo 3 nedělí } a_n \end{cases}$$

Úloha 6. Když v posloupnosti z předchozí úlohy změníme první člen a_1, dostaneme posloupnost, která se může zacyklit až po mnoha krocích. Například pro $a_1 = 25$ se tato posloupnost nezacyklí ani v 50. členu. Najděte člen, ve kterém se posloupnost zacyklí.

Úloha 7. Posloupnost $a_1 = 9$, $a_2 = 11$, $a_3 = 13$, $a_4 = 16$, ... je dána předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{když číslo 2 dělí } a_n \\ \langle k \times a_n \rangle & \text{když číslo 2 nedělí } a_n \end{cases}$$

Najděte parametr k.

Úloha 8. Posloupnost, jejíž první členy mají tvar 50, 25, 35, 49, 69, 97, 137, 193, 272, 136, 68, 34, 17, 24, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 1, 1, ... je dána předpisem uvedeným v předchozí úloze. Zjistěte hodnotu parametru k.

Řešení

Úloha 1. V následující tabulce je vypsáno prvních 13 členů dané posloupnosti:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
12	18	**6**	**2**	**7**	**12**	**4**	**9**	**3**	**1**	6	2	7

Vidíme, že v posloupnosti se dále periodicky opakuje osmice čísel 6, 2, 7, 12, 4, 9, 3, 1. Z toho lehce vidíme, že $a_{22} = a_{14} = a_6 = 12$.

Úloha 2. Vypisujme členy dané posloupnosti, až se objeví opakování:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
23	30	10	5	12	**4**	**2**	**1**	**8**	4	2	1	8

Vidíme, že k zacyklení dochází u členu $a_{10} = 4$ a v posloupnosti se dále periodicky opakuje čtveřice čísel 4, 2, 1, 8. Tedy například $a_8 = a_{12} = a_{16} = \cdots = a_{40} = \cdots = a_{120} = \cdots = a_{148} = 1$. Proto pak $a_{149} = 8$ a $a_{150} = 4$.

Úloha 3. Vypisujme členy dané posloupnosti, až se objeví opakování:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
5	17	22	**39**	**13**	**52**	**65**	**117**	39	13	52	65	117

Vidíme, že k zacyklení dochází u členu $a_9 = 39$ a v posloupnosti se dále periodicky opakuje pětice čísel 39, 13, 52, 65, 117. Tedy $a_{k+5m} = a_k$ pro všechna $k > 3$ a všechna přirozená m. Odtud $a_{123} = a_{8+115} = a_8 = 117$.

Úloha 4. Když prozkoumáme všech 49 posloupností, zjistíme, že k zacyklení v devátém členu dochází u tří posloupností a k zacyklení v desátém členu u dvou posloupností:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	
2	3	5	8	4	2	1	3	4		k zacyklení
3	2	5	7	12	6	3	9	12		dojde v 9. členu
6	1	7	8	4	2	1	3	4		posloupnosti
2	7	9	16	8	4	2	1	3	4	k zacyklení
6	5	11	16	8	4	2	1	3	4	dojde v 10. členu

Ve všech dalších případech dojde k zacyklení dříve než v devátém členu.

Úloha 5. Vypisujme členy dané posloupnosti, až se objeví opakování:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
31	54	18	6	2	3	1	2	3	1	2	3	1

Vidíme, že k zacyklení dochází u členu $a_8 = 2$ a v posloupnosti se dále periodicky opakují členy 2, 3, 1. Tedy $a_{138} = a_{6+132} = a_6 = 3$.

Úloha 6. Posloupnost se zacyklí až v členu $a_{55} = 123$. Pro tuto posloupnost platí $a_1 = 25$, $a_{10} = 3\,424$, $a_{20} = 30\,529$, $a_{30} = 52\,441$, $a_{40} = 3\,344$, $a_{50} = 1\,107$, $a_{51} = 369$, $a_{52} = 123$, $a_{53} = 41$, $a_{54} = 71$, $a_{55} = 123$.

Úloha 7. Pro hledaný parametr k platí vztahy:

$$\begin{array}{rcl} 10{,}5 \le & 9k & < 11{,}5 \\ 12{,}5 \le & 11k & < 13{,}5 \\ 15{,}5 \le & 13k & < 16{,}5 \end{array} \quad \text{ze kterých plyne} \quad \begin{array}{l} 1{,}166 \le k < 1{,}277 \\ 1{,}136 \le k < 1{,}227 \\ 1{,}192 \le k < 1{,}269 \end{array}$$

Řešením úlohy jsou všechna čísla k z intervalu $1{,}192 \le k < 1{,}227$.

Úloha 8. Postupujeme stejně jako při řešení předchozí úlohy. Nyní pro k platí vztahy

$$\begin{array}{rcl} 34{,}5 \le & 25k & < 35{,}5 \\ 48{,}5 \le & 35k & < 49{,}5 \\ 68{,}5 \le & 49k & < 69{,}5 \\ 96{,}5 \le & 69k & < 97{,}5 \\ 136{,}5 \le & 97k & < 137{,}5 \\ 192{,}5 \le & 137k & < 193{,}5 \\ 271{,}5 \le & 193k & < 272{,}5 \\ 23{,}5 \le & 17k & < 24{,}5 \\ 3{,}5 \le & 3k & < 4{,}5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ze kterých, při} \\ \text{zaokrouhlení na tři} \\ \text{desetinná místa} \\ \text{plyne} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1{,}380 \le k < 1{,}420 \\ 1{,}385 \le k < 1{,}414 \\ 1{,}397 \le k < 1{,}418 \\ 1{,}399 \le k < 1{,}413 \\ 1{,}407 \le k < 1{,}418 \\ 1{,}405 \le k < 1{,}412 \\ 1{,}407 \le k < 1{,}412 \\ 1{,}382 \le k < 1{,}441 \\ 1{,}166 \le k < 1{,}500 \end{array}$$

Řešením úlohy jsou všechna čísla k z intervalu $1{,}407 \le k < 1{,}412$.

Prof. Milan Hejný
KMDM UK, M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz

Mgr. Marie Tichá
MÚ AVČR, Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: ticha@math.cas.cz