Milan Hejný; Marie Tichá

Matematické příběhy (5): Příběh pátý. S jakou přesností měří tachometr?

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 2, 74–84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150800

MATEMATICKÉ PŘÍBĚHY (5)

Příběh pátý

S JAKOU PŘESNOSTÍ MĚŘÍ TACHOMETR?

M. HEJNÝ, M. TICHÁ

„Ahoj Matěji! Hádej, co máme nového!“

„Snad si už vaši nekoupili to nové auto?“

„Jasně! Zvu tě na první zkušební jízdu. Možná, že se při ni rozhodne náš spor o střední trati. Konečně ti dokážu, že délka střední tratě přesahuje třetinu kilometru.“

„Ty jsi snad spadnul z višně nebo to říkáš naschvál, protože určitě dobře víš, že tachometr ukazuje jen celé kilometry. Dokazovat bys něco mohl jen tehdy, kdyby se ten váš tachometr naučil měřit i na centimetry!“

Hádku mezi chlapci na chvíli přerušíme, abychom vám vysvětlili, jaký to vlastně měli spor o délku střední tratě. Začalo to stopkami, které minulé léto dostal Vláďa Horák k narozeninám. Kluci z celé ulice hned uspořádali běžecké závody. Závodilo se na třech tratích. Krátkou vytyčili pomocí pásma, měřila 60 metrů. Střední (350 metrů) a dlouhou (1 500 metrů) jen odhadli. Konečně, důležitý byl dosažený čas a na délce tratě tak moc nezáleželo. Později si však kluci chtěli svoje výkony porovnat s výkony uvedenými v jedné tabulce a proto potřebovali znát délku tratí přesně. Pokoušeli se je změřit krokováním, jenže Matějovi vyšlo 345 a Filipovi 325 metrů pro střední trať a 1 470 a 1 395 metrů pro dlouhou. A spor byl na světě. A vzhledem k tomu, že převážně běhávali střední trať, hádky se soustředily kolem odhadu délky střední tratě.

„Víš co, Matýsku pečlivě sleduj běh mých myšlenek a já se pokusím tvému natvrdlému mozečku vysvětlit, jak je možné pomoci tachometru rozhodnout náš spor. Podívej, auto projede naši střední trať třikrát po sobě. Jestliže ani potom tachometr neposkočí o kilometr, bude jasné, že trojnásobek délky tratě je kratší než kilometr, tedy trať měří méně než 333 metrů, z čehož vyplývá, že mám zcela neodvolatelně pravdu. Jasné?"

„Ale protože tachometr poskočí o kilometr už při třetím okruhu, bude jasné, že pravda je na mojí straně."

To už Strýcotec (kluci tak říkali Filipovu tatínkovi) zařadil rychlost a pustil spojku. Auto poskočilo. Na tachometru právě naskočilo 50 kilometrů.

„Přískoky vpřed", zavelel Filip.

„Jestli budeš popichovat, zavelím poklusem za autem!", vrátil mu to Strýcotec.

Při třetím projíždění tratě Strýcotec schválně zpomalil, aby měření bylo napínavější. Matěj prosil tachometr, aby poskočil, Filip ho zaklínal, aby neposkočil. A tachometr? Jednička přece jen v poslední zatáčce naskočila — asi 40 metrů před ukončením třetího okruhu. Matěj zahulákal mohutné hurá!

Filipovi nezbylo než přiznat porážku. Ale nyní už aspoň bylo jasné, že délka střední tratě je přibližně $1\,040 : 3 \approx 347$ metrů, přičemž chyba nepřevýší 10 metrů.

Po tomto úspěchu měření bohužel skončilo, protože Filipovi rodiče se jeli podívat na tetu do Jablonce. Návštěva však naštěstí netrvala dlouho a tak po návratu kluci uprosili Strýcotce, aby změřili i dlouhou trať. Odhadovali ji přibližně na 1 430 metrů. Nyní však měli situaci horší. Tachometr ukazoval 82 km, ale chlapci nevěděli, kdy číslo naskočilo. Auto mohlo mít ujeto 82 001 metrů stejně jako 82 999 metrů a to je doopravdy velký rozdíl. Na dlouhé úvahy však neměli čas, museli hlavně využít Strýcotcovu ochotu. Rozhodli se proto, že budou přesně zapisovat stav tachometru po projetí každého okruhu a výsledky vyhodnotí až později. Auto projelo okruh sedmkrát a kluci přitom sestavili tuto tabulku:

okruh	1	2	3	4	5	6	7
tachometr	83	85	86	88	89	90	92

„Musíme na to jít systematicky." prohlásil Filip, když začali vyhodnocovat výsledky. „Především je jasné, že máme dvě neznámá čísla, a to:

p – počet metrů, které mělo auto najeto nad 82 km

q – délku trati (jednoho okruhu) měřenou v metrech.

Nám jde jen o číslo q, ale zřejmě se nevyhneme tomu, abychom nepočítali i s číslem p.“

„Na startu tedy mělo auto najeto $(82\,000+p)$ metrů, po prvním okruhu to bylo o q metrů více, tedy $(82\,000 + p + q)$ metrů. Po druhém okruhu $(82\,000 + p + 2q)$ metrů atd.,“ upřesnil Matěj.

„Myslím, že bude rozumné těch 82 000 všude odečíst a všechno pak zapsat do tabulky.“

Tak chlapci sestavili tuto tabulku:

Okruh	Ujeté metry	Metry naměřené tachometrem
1	$p+q$	1 000
2	$p+2q$	3 000
3	$p+3q$	4 000
4	$p+4q$	6 000
5	$p+5q$	7 000
6	$p+6q$	8 000
7	$p+7q$	10 000

„Abychom s tím mohli něco udělat, musíme to vyjádřit nějak matematičtěji. Například první řádek zapíšeme pomoci nerovnosti $p < 1\,000$,“ řekl Matěj.

„Myslím, že přesnější by bylo $0 < p < 1\,000$.“ dodal Filip. „Druhý řádek potom bude $1\,000 < p + q < 2\,000$,“ pokračoval Matěj.

„Víš co, piš to pod sebe,“ navrhnul Filip.

Tak se chlapcům podařilo tabulku „zmatematizovat“ na soustavu nerovnic

$$0 < p < 1\,000$$
$$1\,000 < p + q < 2\,000$$
$$3\,000 < p + 2q < 4\,000$$
$$4\,000 < p + 3q < 5\,000$$
$$6\,000 < p + 4q < 7\,000$$
$$7\,000 < p + 5q < 8\,000$$
$$8\,000 < p + 6q < 9\,000$$
$$10\,000 < p + 7q < 11\,000$$

„Víš co, zkusíme dosadit za p nějakou konkrétní hodnotu," navrhnul Filip. „Například střední hodnotu $p = 500$. Potom by soustava vypadala líp."

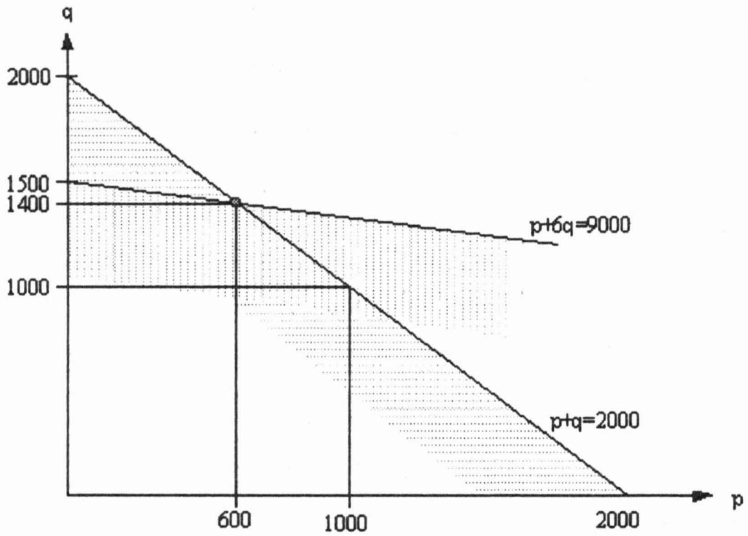
Při sestavování poslední tabulky museli chlapci sice trochu dělit, výsledek však byl výborný. A Matěj pak ještě zvýraznil největší z dolních a nejmenší z horních odhadů čísla q.

$$500 < q < 1\,500$$
$$1\,250 < q < 1\,750$$
$$1\,167 < q < 1\,500$$
$$\mathbf{1\,375} < q < 1\,625$$
$$1\,300 < q < 1\,500$$
$$1\,250 < q < \mathbf{1\,416}$$
$$1\,357 < q < 1\,500$$

„Kdybychom tedy bezpečně věděli, že $p = 500$, mohli bychom s jistotou tvrdit, že q leží mezi 1 375 a 1 416. Vzali bychom průměr $q = 1\,395{,}5$ a chyba by nepřesáhla 20,5 metru. To je poměrně přesné, nebo snad ne?"

„Jenže my to nevíme," vzdychl Filip. „Zdá se, že on to není zas tak moc jednoduchý problém."

Filip měl pravdu. Problém je skutečně náročný a není divu, že ho chlapci tak docela nezvládli. Dořešíme ho za ně. Pomůže nám geometrie. Proměnné parametry p, q zobrazíme na dvou navzájem kolmých osách.



Obrázek 1

Každou nerovnici ze soustavy znázorníme polorovinou. Například nerovnice

$$p + q < 2000$$

je znázorněná vodorovným šrafováním a nerovnice

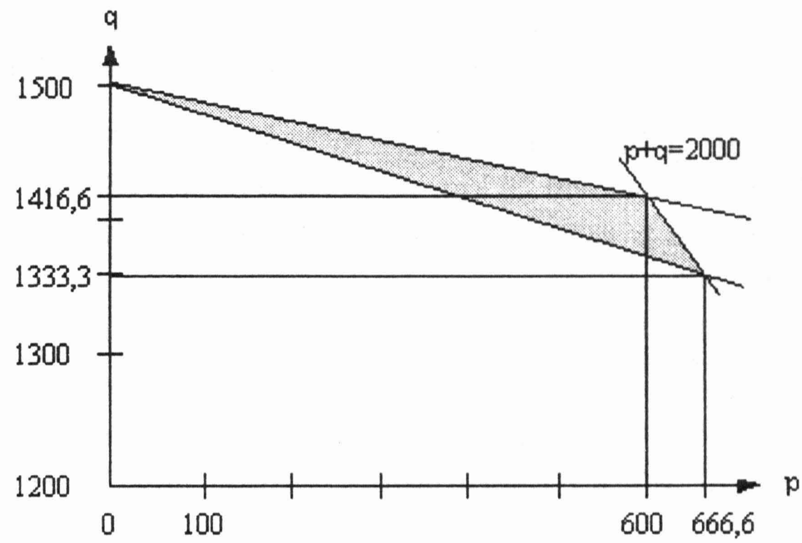
$$p + 6q < 9\,000$$

svislým šrafováním.

Když takto zobrazíme všech 16 nerovnic soustavy, zjistíme, že pouze tři z nich jsou rozhodující: $p + q < 2\,000$, $p + 6q < 9\,000$, $6\,000 < p + 4q$.

Průnikem tří polorovin, kterými jsou tyto nerovnice znázorněny, je trojúhelník. Na obrázku ho vidíte zvětšený.

Vyznačený trojúhelník znázorňuje všechny dvojice (p, q), které vyhovují všem nerovnicím soustavy. Pro nás jsou důležité pouze hodnoty parametru q. Ty leží v intervalu od 1 333,3 do 1 500. Jeho střední hodnota je 1 416,6. Na základě naměřených údajů tedy



Obrázek 2

můžeme říci, že $q \approx 1\,416,6$. Přitom chyba odhadu nepřevyšuje 63,3 metru.

Toto řešení je náročné. Proto si nedělejte těžkou hlavu, jestliže jste mu úplně neporozuměli. Všechno pochopíte, až se budete učit o lineárním programování. Teď se pusťte do řešení úloh, to vám zlepší náladu!

Úloha 1. Tachometrem měříme délku jednoho okruhu. V okamžiku startu právě naskočilo číslo 345. Po prvním oběhu bylo na tachometru 347, po druhém 349 a po třetím 352. Co můžete říci o délce okruhu?

Úloha 2. Co můžete říci o délce q většího okruhu na základě hodnot, které naměřili Matěj s Filipem, jestliže předpokládáte, že je a) $p = 300$ b) $p = 700$.

Úloha 3. Co můžete říci na základě Matějem a Filipem naměřených hodnot o délce q většího okruhu, jestliže číslo 82 naskočilo na tachometru těsně před startem?

Úloha 4. Co můžete říci o délce většího okruhu na základě této jediné informace: při startu bylo na tachometru 82 a číslo 88 naskočilo těsně (50 – 60 metrů) před ukončením čtvrtého oběhu?

Úloha 5. Okruh, jehož délka je d metrů, auto objelo čtyřikrát. Při startu tachometr ukazoval 26 km, po prvním oběhu 28, po druhém 31, po třetím 34 a přesně při ukončení čtvrtého naskočilo 37. Co můžete říci o čísle d?

***Úloha 6**[1]. Z postupu řešení druhé úlohy je vidět, že číslo p, které určuje rozdíl délky dráhy projeté autem a stavem na tachometru, nemůžeme při výpočtu určovat libovolně. Jak je možné volit číslo p v případě údajů, které naměřili Matěj a Filip, když měřili délku většího okruhu?

***Úloha 7.** Co je možné říci o délce většího okruhu na základě údajů, které chlapci naměřili, aniž byste věděli jaká je velikost p?

Úloha 8. Po okruhu délky d projížděla dvě auta. Na začátku byl stav tachometru v prvním autě 25, ve druhém 31. Po prvním okruhu ukazoval první tachometr 26 a druhý 33, po druhém okruhu první 27 a druhý 34, po třetím první 29 a druhý 35, po čtvrtém první 30 a druhý 37 a po pátém první 31 a druhý 38. Určete délku okruhu, jestliže víte, že při startu byl rozdíl mezi stavem tachometru a ujetou vzdáleností u prvního auta 150 a u druhého 850 metrů.

Úloha 9. Auta, která jezdí ve Velké Británii, se od našich liší nejen tím, že mají volant na pravé strne, ale i tím, že jejich tachometry neukazuji ujeté kilometry, ale míle. Jakou délku tratě v metrech by chlapci naměřili na větším okruhu, jestliže by měli „mílový“ tachometr? Předpokládejte, že číslo 82 naskočilo 400 metrů před startem. Jedna míle je přibližně 1 609 metrů.

Řešení úloh

Úloha 1. Stejným postupem jako v úloze z příběhu dostanete soustavu nerovnic

[1] hvězdička označuje náročnější úlohu

$$2\,000 < q < 3\,000$$
$$4\,000 < 2q < 5\,000$$
$$7\,000 < 3q < 8\,000$$

Písmenem q je označena délka jednoho okruhu v metrech. Řešením nerovnic dostanete pro q intervaly:

$$(2\,000, 3\,000),\ (2\,000, 2\,500),\ (2\,333, 2\,666).$$

Vzhledem k tomu, že číslo q musí patřit každému z těchto intervalů, leží v jejich průniku. To znamená, že platí: $2\,333 < q < 2\,500$.

Úloha 2. Také tady, pokud opakujete postup z příběhu, dostanete soustavu nerovnic a intervalů pro neznámou hodnotu q.

případ a)		**případ b)**	
nerovnice	**interval**	**nerovnice**	**interval**
$700 < q < 1\,700$	$(700, 1\,700)$	$300 < q < 1\,300$	$(700, \mathbf{1\,300})$
$2\,700 < 2q < 3\,700$	$(1\,350, 1\,850)$	$2\,300 < 2q < 3\,300$	$(1\,150, 1\,650)$
$3\,700 < 3q < 4\,700$	$(1\,233, 1\,566)$	$3\,300 < 3q < 4\,300$	$(1\,100, 1\,433)$
$5\,700 < 4q < 6\,700$	$(\mathbf{1\,425}, 1\,675)$	$5\,300 < 4q < 6\,300$	$(\mathbf{1\,325}, 1\,575)$
$6\,700 < 5q < 1\,700$	$(1\,340, 1\,540)$	$6\,300 < 5q < 7\,300$	$(1\,260, 1\,460)$
$7\,700 < 6q < 8\,700$	$(1\,283, \mathbf{1\,450})$	$7\,300 < 6q < 8\,300$	$(1\,216, \mathbf{1\,383})$
$9\,700 < 7q < 10\,700$	$(1\,385, 1\,528)$	$9\,300 < 7q < 10\,300$	$(1\,328, 1\,471)$
Délka okruhu je větší než 1 425 m a menší než 1 450 m.		Tato situace není možná, protože číslo q má být současně větší než 1 325 a menší než 1 300	

Úloha 3. Jestliže použijete stejné označení jako v minulých úlohách, platí $p = 0$. Máme určit ohraničeni (meze) pro číslo q. Soustava nerovnic a příslušných intervalů je v tabulce na následující straně.

Poznámka. Důsledně vzato, číslo q neexistuje, protože pro ně má platit $1\,500 < q < 1\,500$. My ovšem víme, že matematický model neodpovídá přesně skutečnosti a toleranci několik decimetrů musíme připustit.

nerovnice	interval	nerovnice	interval
$1\,000 < q < 2\,000$	$(1\,000, 2\,000)$	$7\,000 < 5q < 8\,000$	$(1\,400, 1\,600)$
$3\,000 < 2q < 4\,000$	$(1\,500, 2\,000)$	$8\,000 < 6q < 9\,000$	$(1\,333, \mathbf{1\,500})$
$4\,000 < 3q < 5\,000$	$(1\,333, 1\,667)$	$10\,000 < 7q < 11\,000$	$(1\,428, 1\,572)$
$6\,000 < 4q < 7\,000$	$(\mathbf{1\,500}, l\,750)$	Délka okruhu je přesně 1 500 m.	

Úloha 4. Jestliže na počátku měření bylo na tachometru p metrů, přičemž číslo p je menší než 1 000, pak pro číslo q, které představuje délku okruhu, platí: $6\,050 < p + 4q < 6\,060$. Z tohoto vztahu a vzhledem k tomu, že číslo p může mít libovolnou hodnotu z intervalu $(0, 1\,000)$, dostanete pro číslo q: $1\,262{,}5 < q < 1\,515$.

Úloha 5. Tuto úlohu je vhodné řešit od konce. Při dokončení posledního okruhu naskočilo na tachometru přesně 37 kilometrů. Při dokončení předposledního okruhu byl stav tachometru mezi kilometrem 34 a 35. Z těchto údajů sestavíme nerovnici $2\,000 < d < 3\,000$. Podobně uvážíme-li poslední dva okruhy dostaneme nerovnice $5\,000 < 2d < 6\,000$ a pro poslední tři a čtyři okruhy dostáváme takto nerovnice $8\,000 < 3d < 9\,000$ a $10\,000 <$ $< 4d < 11\,000$. Po vyřešení této soustavy nerovnic dostanete interval $(2\,666, 2\,750)$. Délky 2 666 metrů a 2 750 metrů jsou mezní pro měřený okruh.

Teď využijeme omezení $2\,666 < d < 2\,750$ k odhadu parametru p, který určuje počet ujetých metrů na začátku měření. Meze pro p dostanete z rovnic

$$26\,000 + p + 4 \cdot 2\,666 = 37\,000$$
$$26\,000 + p + 4 \cdot 2\,750 = 37\,000$$

Z první rovnice dostanete $p = 336$, z druhé $p = 0$. To tedy jsou meze pro počet metrů, které mohlo auto ujet od začátku měření do okamžiku, kdy na tachometru naskočilo číslo 26.

Úloha 6. Protože platí nerovnice

$$1\,000 < p + q < 2\,000, 3\,000 < p + 2q < 4\,000, \ldots$$
$$\ldots, 10\,000 < p + 7q < 11\,000,$$

musí platit i nerovnice:

$$1\,000 - q < p < 2000 - q, 3\,000 - 2q < p < 4\,000 - 2q, \ldots$$
$$\ldots, 10\,000 - 7q < p < 11000 - 7q.$$

I když číslo p neznáme, víme, že je větší než každé ze sedmi čísel $1\,000 - q$, $3\,000 - 2q$, $4\,000 - 3q$, $6\,000 - 4q$, $7\,000 - 5q$, $8\,000 - 6q$, $10\,000 - 7q$ a zároveň menší než každé ze sedmi čísel $2\,000 - q$, $4\,000 - 2q$, $5\,000 - 3q$, $7\,000 - 4q$, $8\,000 - 5q$, $9\,000 - 6q$, $11\,000 - 7q$. Z uvedeného dostaneme soustavu 49 nerovnic, z nichž některé se opakuji a některé jsou triviální. Řešením této soustavy nerovnic jsou všechna čísla z intervalu $(1\,333, 1\,500)$.

Jestliže do soustavy nerovnic, s jejichž pomocí jsme odhadovali číslo p, dosadíte právě určené mezní hodnoty pro číslo q, dostanete pro p interval $(0, 666)$. To znamená, že pokud chcete, aby úloha o měření delšího okruhu měla řešení, musíte číslo p volit z intervalu $(0, 666)$.

Úloha 7. Tuto úlohu jste už vlastně vyřešili při řešení šesté úlohy. Pokud číslo p není nijak omezené, pak délka q může být udána libovolným číslem z intervalu $(1\,333, 1\,500)$.

Úloha 8. Jestliže označíte písmenem p vzdálenost (v metrech), kterou ujelo první auto od okamžiku, kdy na jeho tachometru naskočilo číslo 25 až do počátku měření, a písmenem r vzdálenost, kterou ujelo druhé auto od okamžiku, kdy na tachometru naskočil 35. kilometr až do počátku měření, dostanete dvě soustavy nerovnic

$$\begin{array}{ll}
0 < p < 1\,000 & 0 < r < 1\,000 \\
1\,000 < p + d < 2\,000 & 2\,000 < r + d < 3\,000 \\
2\,000 < p + 2d < 3\,000 & 3\,000 < r + 2d < 4\,000 \\
4\,000 < p + 3d < 5\,000 & 4\,000 < r + 3d < 5\,000 \\
5\,000 < p + 4d < 6\,000 & 6\,000 < r + 4d < 7\,000 \\
6\,000 < p + 5d < 7\,000 & 7\,000 < r + 5d < 8\,000
\end{array}$$

Jestliže za p a r dosadíme hodnoty 150 a 850, dostaneme pro číslo d, které označuje délku okruhu v metrech, soustavu deseti nerovnic. Všem těmto deseti nerovnicí vyhovují všechna čísla z intervalu $(1\,267{,}5, 1\,370)$.

Úloha 9. Stejně jako v minulých úlohách označíte písmenem q délku měřeného okruhu a písmenem p počet metrů, které auto ujelo mezi naskočením čísla 82 a startem. Z naměřených hodnot dostanete soustavu nerovnic uvedenou v levém sloupci. Po dosazení hodnoty $p = 400$ a upravení dostanete soustavu nerovnic v pravém sloupci.

$$
\begin{array}{rl}
1\,609 < p + q < 3\,218 & \quad 1\,209 < q < 2\,818 \\
4\,827 < p + 2q < 6436 & \quad 2\,213 < q < 3\,018 \\
6\,436 < p + 3q < 8045 & \quad 2\,012 < q < 2\,548 \\
9\,654 < p + 4q < 11263 & \quad 2\,313 < q < 2\,715 \\
11\,263 < p + 5q < 12872 & \quad 2\,172 < q < 2\,494 \\
12\,872 < p + 6q < 14481 & \quad 2\,078 < q < 2\,346 \\
16\,090 < p + 7q < 17699 & \quad 2\,241 < q < 2\,471
\end{array}
$$

Číslo q vyhovuje všem uvedeným nerovnicím právě když patří do intervalu $(2\,313, 2\,346)$.

A nyní už můžete odhadnout délku měřeného okruhu.

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha
M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1
e-mail: Milan.Hejny@pedf.cuni.cz

Mgr. Marie Tichá, CSc.
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25, 115 67 Praha 1
e-mail: ticha@math.cas.cz