

Jan Hendl

Reforma výuky matematiky podle NCTM standardů 2000

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 1, 23–33

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150792>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

REFORMA VÝUKY MATEMATIKY PODLE NCTM STANDARDŮ 2000

JAN HENDL

Národní rada učitelů matematiky (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) je mohutná americká profesní organizace učitelů matematiky v USA a Kanadě, která má dnes přes 100 000 členů. Vznikla v roce 1920 transformací Chicagského Matematického Klubu. Její členstvo tvoří učitelé ze všech typů škol, matematikové, představitelé různých úrovní státní správy, politikové i rodičové.

Zhruba před dvaceti byla na půdě této organizace iniciovaná diskuse o cílech a obsahu výuky matematiky na základních a středních školách. Chceme čtenáře informovat o tomto procesu a stručně uvést jeho dosavadní výsledky. Reforma se sice týká výuky matematiky v USA, ale ovlivňuje didaktické reformní hnutí v matematice na celém světě. Nejdříve uvedeme obecné charakteristiky reformy z roku 1989. Poté v přehledu popíšeme poslední verzi Standardů z roku 2000.

První návrh reformy

Rámec úvah o změnách výuky matematiky v USA tvoří skutečnost, že všechny rozvinuté země prodělávají v současné době změnu od industrializované společnosti ke společnosti informační. Jde o posun, který nutně transformuje aspekty matematiky nutné vstřípit studentům, stejně jako koncepty a postupy, které musejí studenti ovládat, pokud chtějí uspět a stát se produktivními občany v 21. stoletím. Při analýze dosavadního kurikula výuky matematiky v USA se postupně vyjasnily hlavní aspekty, které je nutné zohlednit v moderně orientované výuce:

- Zavádění počítačů a informačních technologií nabízí možnosti navrhnout nové koncepce základních dovedností v aritmetice a algebře: větší důraz na číselný a symbolický smysl a strategie pro mentální manipulace a přibližné výpočty s klesajícím významem algoritmů prováděných pomocí tužky a papíru.
- Větší důraz na užitečná témata ze statistiky, pravděpodobnosti a diskrétní matematiky.
- Větší důraz na autentické aplikace matematických konceptů, dovedností a dokazovacích/inferenčních procesů.
- Integrace obsahových témat a ne výuka na základě kolekce vzájemně nepropojených disciplín.
- Rozvoj matematické kultury myšlení studenta.

V roce 1989 NCTM připravil základní dokument o standardech matematického kurikula a hodnocení studentů ([2]). Standardy předpokládají, že studenti mají být vystaveni četným a různorodým zkušenostem, které je povzbudí k tomu, aby dovedli ocenit matematické přístupy, aby rozvíjeli správné matematické návyky uvažování a aby porozuměli a ocenili roli matematiky při řešení problému lidstva. Mají být povzbuzeni k tomu, aby prozkoumávali a řešili matematické problémy a nezalekli se dělat chyby a opravovat je, aby získali sebedůvěru ve své schopnosti řešit složité problémy. Mají se naučit číst, psát a diskutovat o matematice, mají se naučit odvozovat, testovat a vytvářet matematická zdůvodnění a hledat spojení mezi matematickým tématy a aplikacemi v reálném světě. Výuka se zvláště ve vyšších ročnících silněji otevírá oblastem diskrétní matematiky, statistiky a matematického modelování. Již na základní úrovni se opouští zaměření pouze na aritmetiku, ale probírají se také témata geometrie a analýzy dat. Od učitele se očekává, že bude vytvářet ve výuce podmínky pro účast studentů na získávání matematických zkušeností a při konverzaci o matematice a řešení problémů. Učitel se má stát koordinátorem diskursu ve třídě. Student se má aktivně účastnit

výuky při hledání, formulaci a řešení matematických problémů, konstruování reprezentací matematických pojmů a vysvětlování a zdůvodňování vlastního matematického uvažování. V souhlase s konstruktivistickými představami se edukant považuje za aktivního tvůrce vlastních znalostí.

Standardy z roku 1989 přijalo mnoho škol v USA. Grantové instituce podporovaly výzkumné práce na zlepšení přenosu standardů do výuky ([1]). Byly zpracovány nové učebnice a pomůcky pro výuku. Výsledky byly různé, některé aspekty materiálu nebyly správně pochopeny. Zástupci jednotlivých zájmových skupin podrobili Standardy tvrdé kritice. Na Internetu o tom najdeme četná svědectví ([4]).

NCTM Standardy 2000

Deset let ověřování a diskusí o původní podobě standardů z roku 1989 vedlo ke vzniku nového zásadního dokumentu, který NCTM publikovala pod názvem *Principles and Standards of School Mathematics* v roce 2000 ([3]). Tento text opakuje v modifikované podobě volání po reformě výuky matematiky. Zjednodušuje prezentaci požadavků, jednotlivé principy se vyjasňují pomocí příkladů problémů, studentských úkolů a modelových dialogů ve třídě.

Knižní publikace má 402 stránek a její obsah je organizován do osmi kapitol. Předmluva a první kapitola uvádějí účel a všeobecný záměr Standardů. Ve druhé kapitole se probírá šest principů, které tvoří předpoklady pro implementaci dokumentu. Ve třetí kapitole se na obecné úrovni popisuje deset standardů matematiky, které mají studenti zvládnout v průběhu školní docházky. Prvních pět se považuje za obsahové standardy, protože se týkají základních témat školní matematiky. Nazývají se obsahové linie (strands). Jednotlivé výukové linie nepředstavují oddělené disciplíny, vzájemně se mají podporovat, při řešení problému se používají příslušné prostředky jednotlivých obsahových linií integrovaným způsobem. V této kapitole se probírají také základní procesy, které mají studenti zvládnout, když pracují v rámci dané obsahové linie. Následující čtyři kapitoly se soustřeďují na jednotlivé věkové kategorie: předškolní výuka až 2. třída, třídy 3 – 5,

třídy 6 – 8, třídy 9 – 12. Každá z těchto kapitol obsahuje podrobný výklad k jednotlivým obsahovým liniím i procesům. Také se uvádějí návrhy, jak je možné doporučení aplikovat v rámci výuky ve třídě. Závěrečná kapitola diskutuje, jak jednotlivé skupiny obyvatelstva (učitelé, školní úředníci, politikové, výzkumníci, studenti, rodičové) mohou spolupracovat na zlepšování matematické výuky .

Věnujme se popisu principů a základů standardů. Principy formulují vlastnosti kvalitní výuky matematiky. Standardy vymezují matematický obsah a procesy, kterým se studenti mají naučit. Oba tyto prvky určují pro učitele směr zlepšování výuky matematiky. Charakterizujeme šest principů, na kterých standardy staví. Princip *rovnosti* vyjadřuje požadavek, že všichni studenti mají mít možnost přístupu ke stejně náročné a hodnotné výuce matematiky. Principy *kurikula, vyučování a učení* ozřejmují potřebu koherentního programu ve všech věkových kategoriích, který poskytne studentům znalosti významných částí matematiky, přičemž se bude vycházet z integrace mimoškolních znalostí a zkušeností studentů se zkušenostmi získávanými ve třídě. Princip *hodnocení* předpokládá takový způsob evaluace, který bude podporovat výuku a proces učení. Standardy předpokládají ústup od testování pomocí zaškrtávání volitelných odpovědí. Řešené úlohy mají vycházet z autentických problémů. Hodnocení si všímá správného matematického myšlení, vyjadřování a konečného výsledku. Konečně princip *technologie* zdůrazňuje důležitost a vliv technologie na výuku a učení matematiky.

Ze standardů nejdříve stručně charakterizujeme požadavky v jednotlivých obsahových liniích, které jsou v dokumentu dále podrobněji zpracovány pro jednotlivé věkové kategorie v 4. až 7. kapitole:

1. Čísla a jejich spojení

Cíl: Porozumět číslům a operacím s nimi. Spolehlivě počítat a odhadovat. Standardy předpokládají fundamentální a hluboké porozumění počítání, aritmetice a číselným systémům a jejich struktuře. Studenti mají dokázat vyhodnotit problém a použít přesný výpočet nebo zdůvodněný odhad.

Tento standard specifikuje u vyšších ročníků např. příslušnou znalost systémů vektorů a matic, které mají podobné vlastnosti jako čísla.

2. Funkce a algebra

Cíl: Rozumět vztahům a funkcím. Reprezentovat a analyzovat matematické situace a struktury použitím algebraické symboliky. Používat matematické modely pro reprezentaci a porozumění kvantitativních vztahů. Analyzovat změnu v různých kontextech.

Tento standard specifikuje u vyšších ročníků např. znalost aritmetického kombinování, skládání a invertování často používaných funkcí použitím technologií pro realizaci symbolických výrazů. Zahnuje diferenciální počet. Také se předpokládá integrované využití získaných znalostí v 5. linii Analýza dat, statistika a pravděpodobnost.

3. Geometrie

Cíl: Analyzovat charakteristiky a vlastnosti dvou- a třídímních geometrických tvarů a rozvinout matematickou argumentaci o geometrických vztazích. Využívat analytickou geometrii. Aplikovat transformace a užívat symetrii pro analýzou matematických situací. Používat vizualizaci, prostorové uvažování a geometrické modelování k řešení problémů.

Tento standard specifikuje u vyšších ročníků např. znalost využití základů projektivní geometrie.

4. Míry a měření

Cíl: Porozumět měřitelným atributům objektů a jednotkám, systémům a procesům měření. Užívat vhodné techniky, prostředky a vzorce určené k zjištění míry.

Tento standard specifikuje u vyšších ročníků např. schopnost odhadnout počet významných číslic při počítání se změřenými údaji a diskutovat správnost a přesnost měření a odhadovat vliv změny škály na interpretaci situace.

5. Analýza dat, statistika a pravděpodobnost.

Cíl: Formulovat otázky, které lze řešit daty a pro jejich zodpovězení shromažďovat, organizovat a zobrazovat relevantní data. Volit a používat statistické metody pro analýzu dat. Pomocí dat navrhovat závěry a hodnotit jejich přesnost. Používat základní koncepty pravděpodobnosti.

Tento standard specifikuje u vyšších ročníků např. znalost různých typů sběru statistických dat a výzkumných plánů (experiment, observační studie, statistické šetření). Na rozdíl od kurikul v jiných zemích se zdůrazňuje výuka této linie již od prvních ročníků školy. Ve zdůvodnění k tomuto standardu se uvádí, že v informační společnosti musí patřit mezi cíle školního vzdělání připravit studenty na život ve světě, který je stále více ovlivněn informačními technologiemi, analýzou empirických dat a přívalem statistických údajů z medií.

Každá obsahová linie Standardů 2000 má své proměnlivé zastoupení ve výuce pro jednotlivé věkové kategorie (obrázek 1) [11].

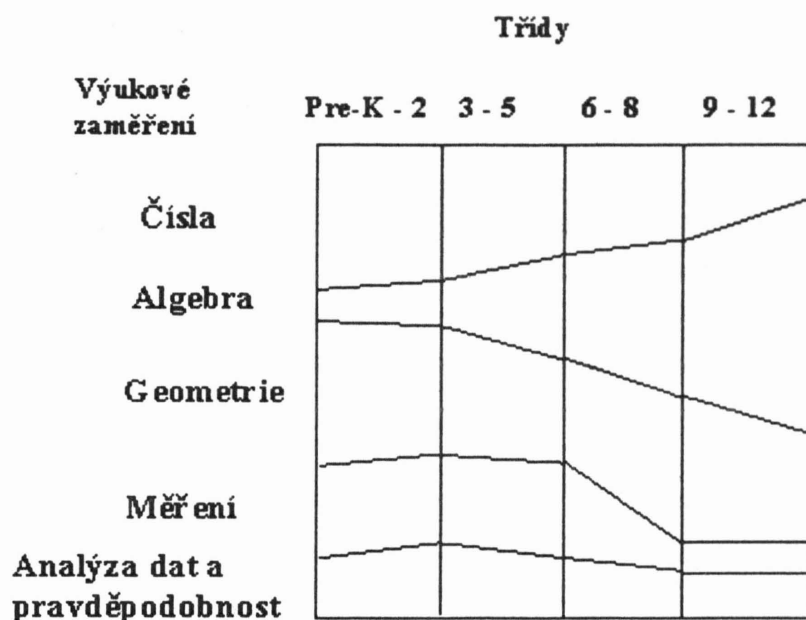
Jak jsme již zmínili, pět dalších standardů ve třetí kapitole pojednává matematické procesy. Jedná se o podobu řešení problémů nebo dokazování a odvozování a o celkový styl práce a matematickou argumentaci.

Studenti se mají naučit vyjadřovat pomocí matematického jazyka a vytvářet spojení mezi různými oblastmi uvnitř a vně matematiky.

Charakterizujeme jednotlivá doporučení z této části standardů.

1. Matematika jako řešení problémů

Didaktický výzkum poukazuje na to, že se studenti neučí novým konceptům tím, že si je sestavují postupně z jednotlivě vysvětlovaných částí. Koncepční myšlení se podporuje tím, že student se pustí do řešení složitého problému, přičemž využívá dosavadní poznatky a metody. To samozřejmě předpokládá určité předporozumění a technické dovednosti. Podle poznatků z didaktického výzkumu však není produktivní před řešením určitého pro-



Obr. 1 Jednotlivé části obsahových standardů dostávají ve věkových kategoriích rozdílný důraz

blému vyžadovat u studenta zvládnutí kompletního kánonu potřebných znalostí.

Matematické vyučování se má proto soustředit na řešení problému jako část matematického uvažování tak, že všichni studenti

- si vytvářejí nové matematické znalosti prostřednictvím řešení problémů,
- řeší problémy, které vznikají v matematice a v jiných kontextech,
- používají a přizpůsobují škálu vhodných strategií k řešení problému,
- monitorují a reflektují proces matematického řešení problému.

2. Matematika jako racionální zdůvodnění a dokazování

Přitažlivost matematiky má původ mimo jiné v tom, že jednou dokázaná tvrzení nikdy neztrácejí svojí platnost. Každá vědní disciplína má své způsoby zdůvodňování a důkazu. Nikde však nejsou tyto kroky tak explicitně zpracované jako v matematice. Systematické zdůvodnění je základní vlastností matematiky.

Matematické vyučování se má proto koncentrovat na zvládnutí racionálního zdůvodňování a postupů dokazování tak, že všichni studenti

- **chápu zdůvodňování a dokazování jako základní aspekty matematiky,**
- **navrhují a zkoumají matematická tvrzení,**
- **rozdívají a vyhodnocují matematické argumenty a důkazy,**
- **vybírají a vhodně uplatňují různé typy zdůvodnění a důkazových metod.**

Příslušné výukové aktivity musejí být přizpůsobeny věku studenta, protože rozvoj logického myšlení je úzce spojeno s intelektuálními a jazykovými schopnostmi studenta.

3. Matematika jako komunikace

Matematika poskytuje prostředky pro vyjádření a komunikaci abstraktních věcných vztahů. Matematické pojmy se nepoužívají jenom uvnitř matematiky, ale používají se také jako pomocné prostředky k efektivním dorozumění o reálných problémech. Komunikace je podstatným aspektem výuky matematiky.

Standarty proto vyžadují, aby matematické vyučování využívalo jazyk a komunikaci, aby se podporovalo matematické porozumění, takže všichni studenti

- **organizují a upevňují své matematické myšlení prostřednictvím komunikace,**

- **komunikují ostatním jasně a koherentně své matematické úvahy,**
- **analyzují a vyhodnocují matematické myšlení a strategie ostatních,**
- **využívají jazyk matematiky jako prostředek pro přesné vyjádření matematických myšlenek.**

4. Matematika jako stavba propojených znalostí

Mnohým studentům připadá matematické vyučování jako nesouvislé nakupení faktů a postupů. Když množství informací překročí určitou mez, student ztrácí jakoukoliv chuť postupovat dále. Nedává mu to žádný smysl. Tato zkušenost však stojí v ostrém protikladu ke skutečnosti, že matematika je vysoce kumulativní věda, jejichž jednotlivé části mají k sobě vztah nebo na sebe navazují.

Matematické vyučování má proto zdůrazňovat propojení mezi jednotlivými částmi látky, aby se podporovalo matematické myšlení studentů tak, že všichni studenti

- **rozpoznají a využívají vztahy a spojení mezi matematickými myšlenkami,**
- **porozumějí tomu, jak jsou matematické koncepty propojené a jak tyto vztahy tvoří určitou koherentní jednotu,**
- **rozpoznají možnosti matematiky a využívají ji v kontextu vně matematiky.**

5. Matematika jako prezentace znalostí

Matematické představy a vztahy lze znázornit rozličným způsobem – pomocí fyzikálních modelů, rovnic, grafem, mentální představou, symbolem jako např. proměnná nebo číslo. Akt vyjádření ideje předpokládá vyjasnění původního konceptu a dává mu strukturu, takže ho lze vyhodnotit a rozšířit.

Matematické vyučování má vést k využívání vyjadřovacích prostředků pro podporu matematické uvažování tak, že studenti

- **sestrojují a využívají matematické způsoby vyjádření s cílem organizovat, zachytit a komunikovat matematické představy,**
- **vybírají a používají různé matematické způsoby vyjádření a přecházejí mezi nimi,**
- **využívají matematické způsoby vyjádření k modelování a interpretování přírodních, sociálních a matematických fenoménů.**

Závěr

NCTM Standardy 2000 jsou projevem americké kultury a nezapřou působení pragmatické filosofie (Dewey, James, Peirce). Některé v nich předkládané myšlenky a navrhovaná řešení budou pro naše učitele překvapující. S nesouhlasem nebo s nepochopením se konečně doporučení Standardů setkala i v Americe. Nicméně Standardy 2000 jsou závažným dokumentem současné diskuse v oblasti didaktiky matematiky a představují důležitý ukazatel pro výuku školní matematiky ve třetím tisíciletí. Pokoušejí se vidět cíle a obsahy výuky matematiky v rámci nové pedagogické kultury, která má tyto charakteristiky:

- vystupuje silněji do popředí spojení matematiky s okolním světem a prožitky edukantů,
- do výuky se integrují technologie,
- výuka zdůrazňuje aktivní jednání edukantů při řešení problému, sestrojování modelů a provádění simulací,
- zesiluje se poukaz na propojení různých částí matematiky a překonává se tradiční rozdělení na jednotlivé oblasti (zvláště v pravděpodobnosti a ve statistice).

Standards 2000 zohledňují různé formy konstruktivismu a situativní epistemologii. Autoři reformy tvrdí, že nová reforma neznamená provozování „nové matematiky“. Reformu zapříčinila nespokojenost s výkony studentů i nové poznatky z pedagogiky a matematiky, které dosavadní výuka nebrala v potaz. Celý dokument se vyznačuje konsekventním propojením jednotlivých matematických témat včetně návaznosti do nematematických oblastí. Inspirativní je poukaz na proměnlivou intenzitu začlenění jednotlivých partií matematiky do výuky v daných věkových kategoriích. Podobně jako naše standardy výuky matematiky na základních a středních školách se nezrodily americké standardy jako na základě ministerského příkazu, ale vytvořily se spontánně na půdě NCTM.

Literatura

- [1] Kilpatrick, J., Martin, W. G., Schifter, D. (eds.), *A Research companion to NCTM's Standards*, Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000
- [2] NCTM: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
- [3] NCTM: *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000 (standards-e.nctm.org).
- [4] *What has happend to mathematics education*. Mathematically Correct 2000 (mathematicallycorrect.com/intro.htm)

Doc. RNDr. Jan Hendl, CSc.

UK FTVS, katedra základů humanitních věd a kinantropologie,

José Martí 31, 162 52 Praha 6

e-mail: HENDL@ftvs.cuni.cz