Libuše Skalická

Zavádějme prvky konstruktivismu do metod vyučování číselným výrazům

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 4, 218–225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150781`

ZAVÁDĚJME PRVKY KONSTRUKTIVISMU DO METOD VYUČOVÁNÍ ČÍSELNÝM VÝRAZŮM[3]

LIBUŠE SKALICKÁ

1. Číselné výrazy na ZŠ, možnosti přístupu k chybám v žákovských řešeních

Čtenář – učitel matematiky – se jistě setkal s didaktickými problémy při výpočtech hodnot číselných výrazů s operacemi sčítání, odčítání, násobení a dělení. Při těchto výpočtech žáci někdy chybně postupují lineárně zleva doprava bez ohledu na pravidla o upřednostnění početních výkonů.

Příklad žákovského řešení: $5+2\cdot4-3=7\cdot4-3=28-3=25$ nebo také $5+2\cdot4-3=7\cdot1=7$.

V procesu řešení popsaných úloh se vyskytuje určitý chybný krok – a možná i více kroků, které vedou k nesprávnému řešení. Za tento nedostatek nemůžeme žákům dávat vinu, pokud nebyly vytvořeny vhodné podmínky pro to, aby se zabránilo jeho vzniku nebo přispělo k jeho odstranění. Jaké jsou to podmínky? Jak je vytvořit?

Ve shodě s M. Hejným ([1], [21, [6], [8]) se domnívám, že na chybu je třeba nahlížet jako na jisté onemocnění určitého duševního orgánu. Původ tohoto onemocnění může být různý; někdy se, bohužel, i samotný učitel, jehož úkolem je onemocnění diagnostikovat a léčit, dopustí zranění žákových „duševních orgánů“ (paměti procesuální či konceptuální, organizačního centra apod.).

Cílem tohoto článku je pomoci učitelům vypátrat ona „zranitelná místa“ duševních orgánů a identifikovat některá onemocnění patrná při řešení úloh na číselné výrazy.

[3] Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 302/1998/APP/PedF.

2. Obecný pohled na pravidla o přednostech operací

Pro řešení číselných výrazů existují mnohá pravidla. Všichni matematici je dodržují a jsou pro ně věcí takřka přirozenou. Žák v průběhu svého studia matematiky (následuje výběr formulací podle různých „didaktických přístupů"):

- se musí tato pravidla naučit, jako když bičem mrská.
- se musí tato pravidla naučit znát a používat.
- musí tato pravidla přijmout za svá, sžít se s nimi.
- musí tato pravidla objevit.
- přijmout jejich existenci a uvědomovat si jejich platnost.
- osvojit si jejich vědomé a později automatické používání.

(Jaký je Váš názor, milý čtenáři?)

Automatické používání těchto pravidel je pro nás natolik zřejmou záležitostí, že je obtížné pravidla formulovat, zvláště když existují ještě další postupy, kterých lze použít ve speciálních případech ke zkrácení nebo zjednodušení výpočtu (zde nazývané „výhody").

Pro lepší orientaci v obsahu pojmu „pravidlo o přednostech početních operací" u žáka 6. ročníku jsem se pokusila sestavit co nejpřesnější soupis těchto pravidel. Tato práce byla nad očekávání zdlouhavá, ale plynula z ní možnost poznat složitost struktury žákovských poznatků. Pro učitele je jistě výhodné vcítit se čas od času do role žáka, který uspořádává své vlastní poznatky. A sestavení soupisu pravidel o přednostech operací k tomu skýtá jedinečnou příležitost. Nebudu čtenáře unavovat celým soupisem, pro ilustraci uvádím jen jeho část:

Pravidla (♣) a výhody (♡) pro výpočty hodnot číselných výrazů

♣ *1. Přednost výrazu v závorce*

1A Jestliže výraz obsahuje jedinou závorku, vypočteme nejprve část výrazu v závorce a potom provedeme zbylé operace.

1B Jestliže výraz obsahuje více než jednu závorku, vybereme si jeden z následujících postupů:

1B 1. Najdeme první závorku odleva takovou, že za začátkem závorky následuje část výrazu a konec závorky. Vypočteme hodnotu části výrazu s dodržením následujících pravidel, závorku nahradíme touto hodnotou a pokračujeme od začátku.

1B 2. Určíme hierarchii závorek, nejprve vypočítáme hodnoty dílčích výrazů v závorkách nejvyššího řádu, potom postupně řádů nižších, a to s dodržením následujících pravidel pro dílčí výrazy v závorkách, ... (vynecháno)

♣ *2. Součiny a podíly*

Ve výrazech a dílčích výrazech, které neobsahují závorky, mají přednost výpočty součinů a podílů před výpočty součtů a rozdílů. Součiny a podíly vypočteme podle jejich pořadí v dílčím výrazu odleva.

♡ *2.1 a) Změny pořadí činitelů*

Jestliže dílčí výraz z ♣ *2 obsahuje pouze součiny, lze zvolit libovolné pořadí činitelů.*

♡ *2.1 b) Změny pořadí dělitelů*

Jestliže dílčí výraz z ♣ *2 obsahuje pouze podíly, lze první číslo (dělenec) vydělit dalšími (dělitelé) v libovolném pořadí.*

♡ *2.2 Skupiny součinů a podílů*

Obsahuje-li výraz z ♣ *2 „skupiny" součinů či podílů – totiž součiny či podíly několika čísel, oddělené jinými operacemi (součtem, rozdílem), na pořadí výpočtů jednotlivých skupin nezáleží, musí však být provedeny před všemi součty a rozdíly. Lze použít* ♡ *2.1.*

♡ *2.3 a) Kombinované součiny a podíly*

Ve výrazech, kde jsou pouze součiny a podíly, můžeme nejprve *vynásobit první číslo a všechna čísla, která mají před sebou znaménko pro násobení (činitele), a potom vynásobit všechna čísla, která mají před sebou znaménko pro dělení (dělitele). Výsledek získáme jako podíl činitelů a dělitelů*

♡ *2.3 b) Kombinované součiny a podíly*

Ve výrazech, kde jsou pouze součiny a podíly, můžeme nejprve vydělit první číslo všemi děliteli v libovolném pořadí a potom násobit všemi činiteli v libovolném pořadí.

♡ *2.3 c) Kombinované součiny a podíly*

Ve výrazech, kde jsou pouze součiny a podíly, můžeme uzávorkovat každý podíl, před kterým je znaménko „·" a postupovat podle pravidel o závorkách.

Soupis pravidel je však pro praxi nepoužitelný; není ani možné, aby se žáci učili pravidla v této podobě.

Tento soupis se tvoří v žákově vědomí jako jistá poznatková struktura a společně s vytvářením této poznatkové struktury dochází (pokud je vše v pořádku) k objevování se jednotlivých funkcí duševních orgánu. (Procesuální dlouhodobá paměť obsahuje pravidlo, jiná část paměti výsledek dílčí operace, orgán pro organizaci musí zabezpečit správné pořadí výpočtů...).

3. Využití prvků konstruktivismu k vytváření struktury

Budeme předpokládat, že dovednosti provádět jednotlivé početní operace jsou u daného žáka již vytvořeny a je třeba, aby došlo ke vzniku sítě vztahových poznatků o upřednostňování operací – čili aby se v hlavě žáka vytvořil „soupis", o němž byla řeč výše.

K vytváření spojů mezi jednotlivými poznatky (komunikačních cest duševních orgánů) dochází u různých jedinců individuálně. Naším úkolem je navrhnout postupy k vytváření a fixaci těchto spojů a k indikaci a následné rekonstrukci chybně vytvořených spojů.

Konstrukce vztahového poznatku obsahuje tato základní specifika:

1. menší důležitost obsahové stránky jazyka a kontextové komunikace;
2. menší důraz na využívání předchozích zkušeností;
3. využívání tzv. logického myšlení, algoritmů a vhledu.

Na rozdíl od mnohých dalších témat matematiky základní školy je při výstavbě vztahových poznatků v oblasti číselných výrazů je téměř nemožné uplatnit výhradně konstruktivistické metody. Je však potřebné, aby prvky konstruktivismu byly ve vyučování této látce obsaženy. Ačkoli jsou konstruktivistické postupy časově náročnější, jsou pro žáka velmi cenné; nepřinášejí jen poznatky, ale také ukazují cesty, kterými lze poznatků dosáhnout. Prvky konstruktivismu je však třeba zavádět s velkou opatrností vzhledem k možnému vzniku nesprávných spojů – možná právě pro tuto náročnost volí mnoho učitelů „pohodlnější" postupy bez prvků konstruktivismu.

Podívejme se nyní na několik nápadů jak zavádět prvky konstruktivismu do vyučování číselným výrazům.

Jeden příklad – mnoho závorek a výsledků

Zadáme žákům číselný výraz bez závorek. Jejich úkolem je umístit závorky různými způsoby, aby dostali co nejvíce různých výsledků.

Příklad: Zadáme $6 + 3 \cdot 4 : 2 - 1 =$

Žáci mohou umístit závorky a počítat;

$(6 + 3) \cdot 4 : 2 - 1 = 9 \cdot 2 - 1 = 17$
$(6 + 3) \cdot 4 : (2 - 1) = 9 \cdot 4 : 1 = 36$
$6 + (3 \cdot 4) : 2 - 1 = 6 + 12 : 2 - 1 = 11$
$6 + (3 \cdot 4) : (2 - 1) = 6 + 12 : 1 = 18$
$6 + 3 \cdot (4 : 2 - 1) = 6 + 3 \cdot 1 = 9$
$(6 + 3 \cdot 4) : 2 - 1 = 18 : 2 - 1 = 8$
$(6 + 3 \cdot 4) : (2 - 1) = 18 : 1 = 18$
$(6 + 3) \cdot (4 : 2 - 1) = 9 \cdot 1 = 9$

$(6+3)\cdot(4:(2-1))=9\cdot 4=36$

Poslední tři výsledky jsme dostali i při jiném uzávorkování. U takových příkladů lze provádět se žáky experimenty, kdy hledáme různé uzávorkování při daném výsledku.

Budou-li mít žáci prostor a motivaci, jistě vymyslí i spoustu otázek, na které se budou snažit společně najít odpověď. Důležitější než vlastní řešení výrazů je diskuse a sdílení zkušeností, a tak se zdá být dobrou variantou zadání této úlohy do skupin o třech až čtyřech žácích, kde je dobrý prostor pro komunikaci členů skupiny, s následnou diskusí mezi jednotlivými skupinami moderovanou učitelem.

Doplň závorky, aby platilo

Zadáme žákům neplatný výrok ve tvaru číselného výrazu, který mají žáci upravit přidáním závorek tak, aby rovnost platila.

Po několika úspěšných řešeních situaci ztížíme – máme použít co nejméně závorek. Ke slovu přicházejí pravidla o přednostech operací v situaci, kdy je žák potřebuje – zvláště, jde-li o soutěž.

Příklad: Zadáme: $5+3\cdot 8-2\cdot 7:2=10$

Žáci mohou upravit:

$5+((3\cdot 8)-(2\cdot 7)):2=10$

$5+((3\cdot 8-2\cdot 7):2)=10$

ale stačí $5+(3\cdot 8-2\cdot 7):2=10$

Změňte výraz – změní se výsledek

Vytvoříme spolu se žáky kartičky s číslicemi a znaky početních operací. Nepoužíváme závorky. Zadáme číselný výraz, žáci jej sestaví a vypočítají výsledek. Dalším úkolem je měnit kartičky tak, aby:

- po záměně dvou kartiček v zápisu výrazu byl výsledek co možná největší / nejmenší
- výsledek byl co nejblíže danému číslu
- výraz byl jiný, ale výsledek stejný jako původní

Příklad: Zadáme $4 \cdot 5 + 8 : 2$ $(= 24)$

Největší výsledek po záměně dvou kartiček: $8 \cdot 5 + 4 : 2 = 42$. Nejmenší výsledek po záměně dvou kartiček: $4 \cdot 2 + 8 : 5 = 9{,}6$ (měníme-li číslice), popř. $4 \cdot 5 : 8 + 2 = 4{,}5$ (měníme-li operace) – lze použít pouze při způsobilosti žáků k práci s desetinnými čísly.

Výsledky „blízké" číslu 15: $8+5 : 4 \cdot 2 = 10{,}5$, $2+8 \cdot 5 : 4 = 12$, $2 \cdot 8 + 4 : 5 = 16{,}8$, $4 \cdot 5 : 2 + 8 = 18$ – záleží na nás, jak omezíme číselný obor.

Výraz jiný, ale výsledek stejný: $8 : 2 + 5 \cdot 4 = 24$, $5 \cdot 8 : 2 + + 4 = 24$.

Tato úloha zdaleka není tak významná tím, že žáci nakonec najdou správné řešení, jako spíše cestou, kterou při hledání projdou. Mnozí si totiž uvědomí, že některá „řešení" nebyla akceptována právě pro interpretaci zápisu. Například výraz $8 + 2 \cdot 5 : 4$ by mohl dostat výsledek 12,5 a být pokládán za výsledek nejbližší číslu 15 – viděno v mysli žáka se závorkou $(8 + 2) \cdot 5 : 4 = 12{,}5$.

Článek je výzvou. Snad byl čtenáři v krátkosti vysvětlen význam některých prvků konstruktivismu a možnosti jejich uplatnění ve vyučování jedné části učiva matematiky. Úloha pro nás učitele: Pokusme se aplikovat uvedené přístupy i v dalších částech učiva. Řešme se žáky úlohy, které jsou cestou k obecnějšímu, a nechme je objevovat tajemství matematiky.

Čtenáře jistě hned napadne mnoho obměn uvedených úloh a možná si někteří postesknou, že jim tento článek nic nového nepřinesl, protože „objevené" již dávno objevili. Takové prosím, aby se mnou sdíleli své zkušenosti nebo publikovali – literatury na téma vztahy početních operací není mnoho a zkušenosti kolegů potěší.

Literatura

[1] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.*, SPN, Bratislava, 1991

[2] Hejný, M., *Uchopování slovní úlohy*, Nepublikovaná verze rukopisu, 1995.

[3] Skalická, L., One cube model of number expression, In: *SEMT 95*, 146–149

[4] Matyášová, M., Skalická, L., *Uchopování pojmu uchopování a jeho podobnost s pojmem podobnost (seminární práce z psychologie)*,. Nepublikovaný rukopis, 1996.

[5] Fonová, A., Experimentator – pupil verbal interaction, In: *SEMT 95* 77–78

[6] Hejný, M., Zmocňování se slovní úlohy, *Pedagogika* **4**(1995) 386–399.

[7] Hejný, M., *Analysis of Student's Solutions of Equations* $x^2 = = a^2$ *and* $x^2 - a^2 = 0$, ADUC 1, 1992, 65–82.

[8] Hejný, M., Components of mathematical knowledge, In: *Interakcja teorii i praktiky nauczani matematiky w szkole podstawowej i średniej* 1996