Bohdan Zelinka
Proč máme tolik různých odmocnin

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 3, 135–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150771

PROČ MÁME TOLIK RŮZNÝCH ODMOCNIN

BOHDAN ZELINKA

Z čísla 4 máme jednu druhou odmocninu, a to 2 (nikoliv už -2), z čísla -4 nemáme odmocninu žádnou (aspoň v oboru reálných čísel). Zato třetí odmocninu z čísla 8 máme také jednu, a to zase 2, ale máme i třetí odmocninu z -8; je to číslo -2.

Vysvětleme si to. Pokud nebude řečeno jinak, budeme mluvit vždy o druhé odmocnině. Rozlišujme reálná čísla kladná a záporná. Druhá odmocnina z reálného čísla a by mělo být číslo b takové, že $b^2 = a$. Je-li $a < 0$, takové číslo b zřejmě neexistuje, protože druhá mocnina (čili čtverec) reálného čísla je vždy nezáporná. Pochopitelně tedy říkáme, že pro $a < 0$ odmocnina a neexistuje. Ale teď si vezměme $a \geq 0$. Je-li b číslo žádané vlastnosti, pak tuto vlastnost má i číslo $-b$. (Například rovnost $b^2 = 4$ splňuje jak $b = 2$, tak i $b = -2$.) Takže zatímco $\sqrt{-4}$ neexistuje, tady je toho zase trochu moc. Taková dvojznačnost by ovšem nebyla vhodná. Ptáme-li se počítače, kolik je $\sqrt{2}$, chceme jedinou odpověď. Proto jaksi umělou úmluvou přidáme další žádanou vlastnost. Ta odmocnina musí být nezáporná. Tak $\sqrt{4}$ je 2 a nikoliv -2. Počítač nebo kapesní kalkulátor nám tedy na otázku po $\sqrt{2}$ vydá (či řečeno jakzykem informatiky „vrátí“) hodnotu asi tak 1,414 … . To je pro něj to SQRT(2) a podobně SQRT(4) = 2. A takto jednoznačně musíme mít druhou odmocninu definovanou ani ne tak kvůli okamžitým výsledkům jako kvůli dalším výpočtům. Je-li u někoho stav jeho financí $1\,000\,000\sqrt{4}$, jistě mu není jedno, je-li to plus či minus dva miliony. A nemusíme se bát ani takových výrazů jako $\sqrt{0}$, je to prostě (jediná hodnota) 0.

Zato je třeba dát pozor při řešení nerovnic. Je pravda že nerovnost $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ platí pro libovolná dvě reálná čísla x, y, nelze to však odůvodňovat tím, že $x^2 + y^2$ je součet čtverců, a ten je vžda nezáporný. Ovšem, tohle je důležité pro existenci odmocniny

$\sqrt{x^2 + y^2}$. Že však platí $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, to platí podle naší úmluvy (jak už jsme řekli, je to úmluva jaksi umělá, i když učiněná pro praktický účel).

Co jsme si řekli o druhých odmocninách, to platí i pro odmocniny s libovolným sudým odmocnitelem. I zde používáme naší úmluvy. Jinak je tomu u lichých odmocnitelů. Je-li n liché přirozené číslo (jiných odmocnitelů než přirozených čísel se obvykle neužívá), pak k danému reálnému číslu a, ať už kladnému nebo zápornému, existuje právě jedno (!) číslo b takové, že $b^n = a$. Je-li $a \geq 0$, pak i $b \geq 0$ a je-li $a < 0$, pak i $b < 0$. To plyne z toho, co známe o násobení záporných a nezáporných čísel. A toto b je prostě $\sqrt[n]{a}$, bez jakýchkoliv dalších úmluv. Takže platí například $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{-64} = -4$. Obecně platí $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. Platí tedy:

$a \geq 0$, n sudé	$\sqrt[n]{a} \geq 0$ (úmluva)
$a \geq 0$, n liché	$\sqrt[n]{a} \geq 0$ (fakticky)
$a \leq 0$, n sudé	$\sqrt[n]{a}$ neexistuje
$a \leq 0$, n liché	$\sqrt[n]{a} \leq 0$ (fakticky)

Dále můžeme přejít do oboru komplexních čísel. O tom si jen stručně řekneme, že zde odmocnina není jediným číslem, ale celou množinou čísel. Při výpočtu se často užívá tzv. odmocnin z jedné (správněji množiny čísel nazvané odmocnina z jedné). Číslo 1 je ovšem také komplexní, a tak máme $\sqrt{1} = \{-1, 1\}$, $\sqrt[3]{1} = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\}$.

Všimněme si ještě didaktického aspektu. Bývá často kladena otázka, zda jsou u přijímací zkoušky z matematiky na vysokou školu dovoleny kapesní kalkulátory. Odpověď zní: Ano, ale ony vám stejně k ničemu nebudou. Má-li být například výsledek $\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}$, měl by být zapsán takto a nikoliv dlouhým desetinným číslem, které by opravovatel mohl kontrolovat pouze zase pomocí kalkulátoru či počítače.