Bohdan Zelinka

Místo Bartsche samoobsluha

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 3, 132–134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150770

Profesor Bohdan Zelinka se zasloužil o matematiku a Technickou univerzitu v Liberci.

Čest jeho památce!

* * *

MÍSTO BARTSCHE SAMOOBSLUHA

BOHDAN ZELINKA

Stává se nám, že potřebujeme nějaký matematický vzorec. Dobrá je na to Bartschova příručka [1]. Ale to, co člověk nejvíce potřebuje, obvykle zapomněl doma nebo to nemůže vyhrabat v horách nepořádku na svém pracovním stole. (Já ten nepořádek ovšem také mám, jenže jej nazývám „pracovní prostředí".) A Bartsch do toho beznadějně zapadne a člověk neví nic. Co tak snadno nikam nezapadne – náš mozek. A tak si leckterý vzorec dokážeme odvodit sami.

Ukažme si to na vzorcích pro součty mocnin přirozených čísel. Označme

$$S_k(n) = \sum_{t=1}^{n} t^k .$$

Začněme s $S_1(n)$, i když to by se dalo hledat i jinak. Máme tedy součet

$$S_1(n) = \sum_{t=1}^{n} t ,$$

známý z vyprávění o dětství C. F. Gausse. Máme

$$S_1(n) - S_1(n-1) = n$$

pro každé n. A pamatujeme si, že $S_1(n)$ je kvadratická funkce proměnné n. Použijeme, podobně jako při rozkladu racionální funkce na parciální zlomky, potřebné k integrování, metodu neurčitých koeficientů. Označme

$$S_1(n) = An^2 + Bn + C \; .$$

Potom

$$S_1(n) - S_1(n-1) = A(n^2 - (n-1)^2) + B(n - (n-1)) =$$
$$= A(2n-1) + B = 2An + B - A \; .$$

Platí ovšem

$$2An + B - A = n \; .$$

Srovnáním koeficientů u lineárních členů na obou stranách i absolutních členů na obou stranách dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ B - A &= 0 \; . \end{aligned}$$

Ta má řešení $A = B = \frac{1}{2}$. Tedy

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + C \; .$$

To C zatím neznáme; v našich rovnicích se nevyskytovalo. Dostaneme je však ze zřejmé podmínky $S_1(1) = 1$; máme $C = 0$. Tedy

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1) \; .$$

A teď si zkusme $S_2(n)$. Zase označíme

$$S_2(n) = An^3 + Bn^2 + n + D \; .$$

(Intuice nám říká, že to bude polynom třetího stupně proměnné n.) Nyní platí

$$S_2(n) - S_2(n-1) = n^2 \; ,$$

tedy

$$S_2(n) - S_2(n-1) = A(3n^2 - 3n + 1) + B(2n - 1) + C =$$

$$= 3An^2 + (2B - 3A)n + A - B + C\,.$$

Toto se má rovnat n^2. Srovnáním koeficientů u kvadratických i lineárních členů i absolutních členů dostáváme tři rovnice

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ -3A + 2B &= 0 \\ A - B + C &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešení je $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$. Máme

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + D\,.$$

To D opět určíme ze vztahu $S_2(1) = 1$; je $D = 0$. Tedy

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}(2n^2 + 3n + n)\,.$$

Nuže, procvičte si to pro $S_k(n)$ s nějakým větším k (binomickou větu jste jistě nezapomněli).

Literatura

[1] Bartsch, H. J., *Matematické vzorce*, Mladá fronta, Praha, 2000