TEORIE GRAFŮ NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE (3)

JANA PŘÍHONSKÁ

V tomto článku předkládám soubor úloh, které je možno použít pro přímou aplikaci teorie grafů na základní škole. Navazují na již dříve uvedené úlohy.

Úloha 1

Hokejový zápas skončil výsledkem 5:3. Kolik různých průběhů mohl mít? (Podle [He].)

Řešení

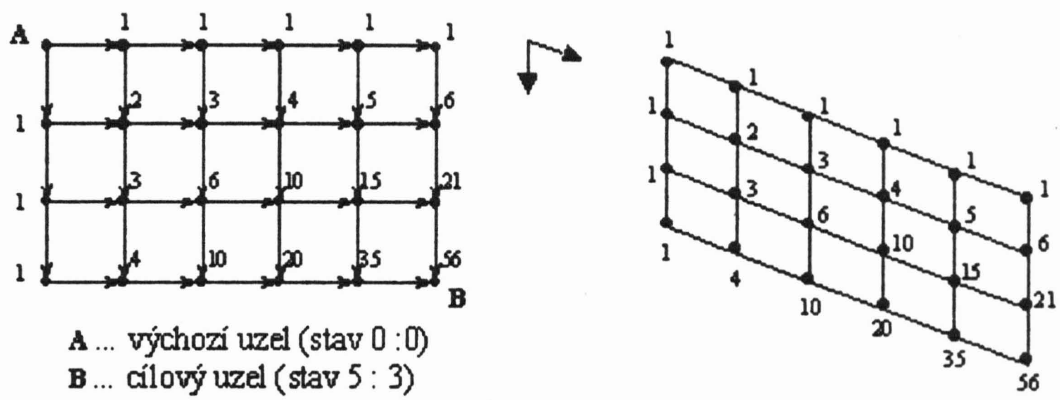
Řešení úlohy lze převést na hledání všech možných cest v orientovaném grafu. Následující schéma zachycuje možný průběh zápasu:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0:0 & \text{—} & 1:0 & & 2:0 & & 3:0 & & 4:0 & & 5:0 \\
 & & | & & & & & & & & \\
0:1 & & 1:1 & & 2:1 & & 3:1 & & 4:1 & & 5:1 \\
 & & | & & & & & & & & \\
0:2 & & 1:2 & \text{—} & 2:2 & & 3:2 & & 4:2 & & 5:2 \\
 & & & & | & & & & & & \\
0:3 & & 1:3 & & 2:3 & \text{—} & 3:3 & \text{—} & 4:3 & \text{—} & 5:3
\end{array}$$

Na obr. 1 je uveden graf s příslušným h-diagramem; h-(asseovské) diagramy dovolují podstatně redukovat zadání významných relací, jejich grafových reprezentací a diagramových znázornění. Přechod od orientovaného grafu k jeho h-diagramu znamená následující zjednodušení:

- odstraníme všechny smyčky v uzlech,
- odstraníme všechny „tranzitivní" hrany,
- uspořádáme uzly do úrovní (zdola nahoru, zprava doleva) podle počtu jejich předchůdců,
- odstraníme všechny šipky.

Uzly v daném grafu odpovídají jednotlivým stavům, šipka znázorňuje přechod z jednoho stavu do druhého. Hledáme počet cest vedoucích do jednotlivých bodů kosočtvercové, resp. kosodélníkové sítě. Směr postupu je dán vyznačenými šipkami. Číslo u uzlu představuje počet dostupných cest.



Obrázek 1: Graf s h-diagramem

Odpověď: Počet všech možných průběhů zápasu je 56.

Úloha 2

V místě A vběhla do bludiště (obr. 2) vyděšená myší rodina. Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. Z rozhovoru udýchaných myší jsme se dozvěděli:

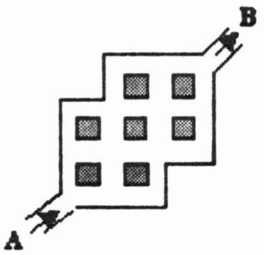
1. Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru.
2. Žádné dvě myši neběžely stejnou cestou.
3. Kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé musely běžet po stejné cestě.

Kolik členů měla myší rodina? (Podle [Ko].)

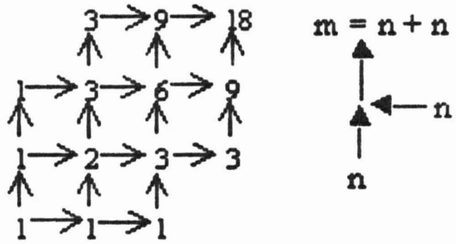
Řešení

Zakreslíme zjednodušený plán bludiště. Vrcholy ve čtvercové síti představují křižovatky (uzly grafu), jejich strany chodby (hrany grafu) – obr. 3. Ve vrcholech čtvercové sítě je vepsán počet cest, vedoucích od startu do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán uvedeným klíčem. Výrazné zjednodušení situace užitím h-diagramu je evidentní z obr. 4.

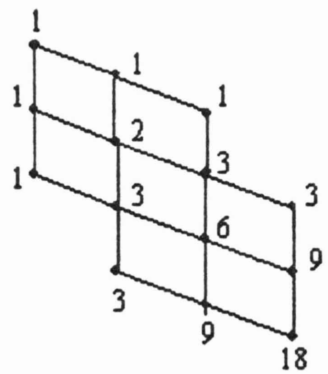
Odpověď: Myší rodina měla 18 členů.



Obrázek 2: Bludiště



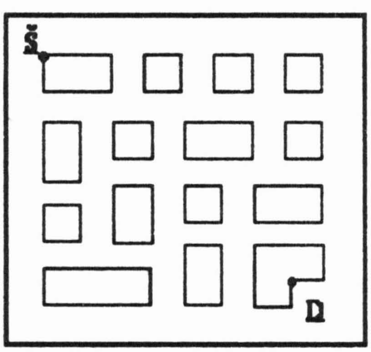
Obrázek 3: Síť bludiště a klíč *řešení*



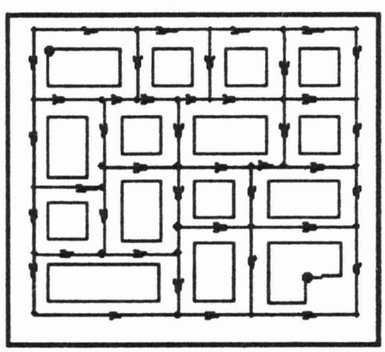
Obrázek 4: H-diagram

Úloha 3

Plánek na obr. 5a zachycuje schematicky rozmístění budov a křižovatek. Při chůzi zleva doprava a shora dolů hledáme počet různých cest z místa š(kola) do místa d(ům).

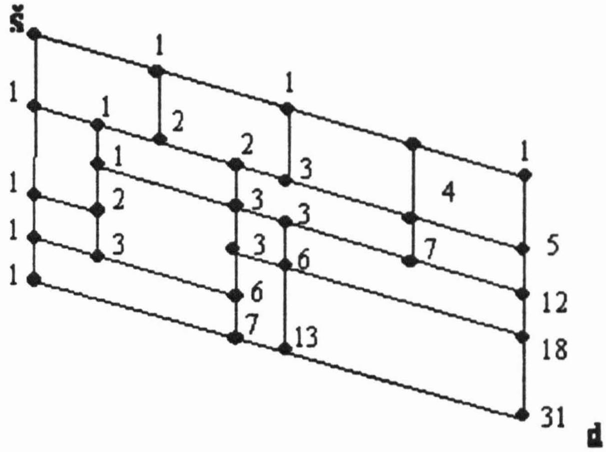


a)



b)

c)



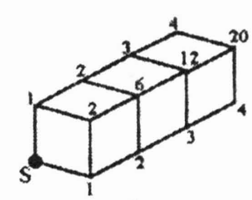
Obrázek 5: a) Plánek sídliště, b) graf, c) h-diagram

Řešení

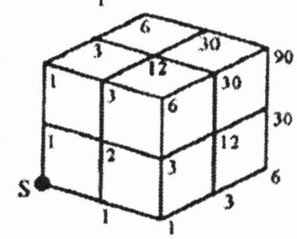
Použijeme h-diagram (obr. 5c). U každého uzlu je uveden počet cest, které do daného uzlu vedou od školy; celkový počet různých cest je 31. Uzly grafu odpovídají křižovatkám na nákresu sídliště. Odpovídající graf je zakreslen přímo v plánku na obr. 5b.

Úloha 4: Cestování po krychli (Podle [Kop].)

Problém 1:
Kolik *nejkratších* cest z bodu S vede do všech viditelných vrcholů tří krychlí?



Problém 2:
Zjisti počet nejkratších cest z bodu S do všech viditelných bodů (vrcholů) dvou vrstev krychlí.

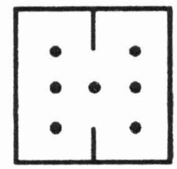


Problematice cestování po krychli a rozvoje prostorové představivosti se věnuje Perný (viz [Pe]).

Teorie grafů může být užitečná i při vytváření obrazců a tvarů, které vyhovují dané podmínce. Vnáší do postupu řešení určitý řád a tím umožňuje systematické určení všech případů řešení – viz následující úlohu.

Úloha 5

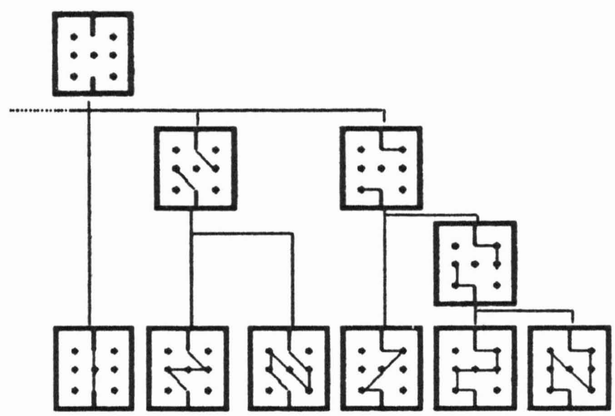
Prkénko, které má 7 otvorů a je ze dvou stran naříznuté (obr. 6), se má rozdělit na dva díly, které budou po otočení o 180° stejné (rotačně shodné). Dělicí řezy musí procházet buď po směru stran čtverců podle sítě otvorů, nebo po úhlopříčkách těchto čtverců. Jak může řez vypadat?



Obr. 6

Řešení

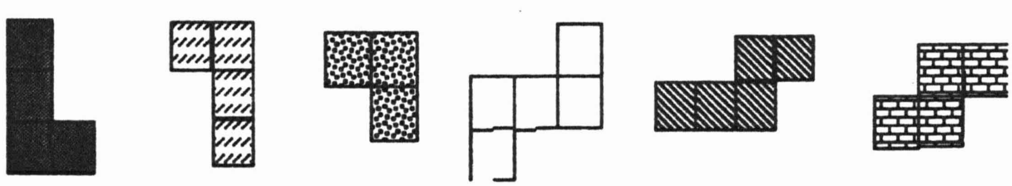
Je zřejmé, že má-li být řez rotačně symetrický, je možné jej provádět pouze z jedné strany (např. shora) a zdola se pak musí symetricky opakovat (obr. 7). Situace, které jsou symetrické podle svislé osy (zrcadlová řešení), můžeme vynechat.



Obrázek 7: Řezy prkénka

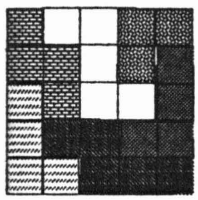
Úloha 6

Z daných šesti dílů sestavte čtverec 5 × 5.

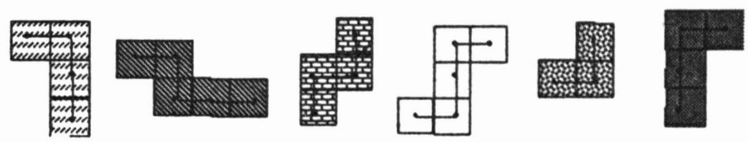


Řešení

Jedno z možných řešení vidíme na obr. 8. Otáčením o 90 získáme zřejmě další tři řešení. „Grafové kódování“ umožní každému z dílů přiřadit graf. Čtverečku odpovídá uzel, dva uzly spojíme hranou tehdy, pokud mají čtverečky společnou stranu. Pro lepší názornost jsou příslušné grafy umístěny přímo do daného dílu (obr. 9).



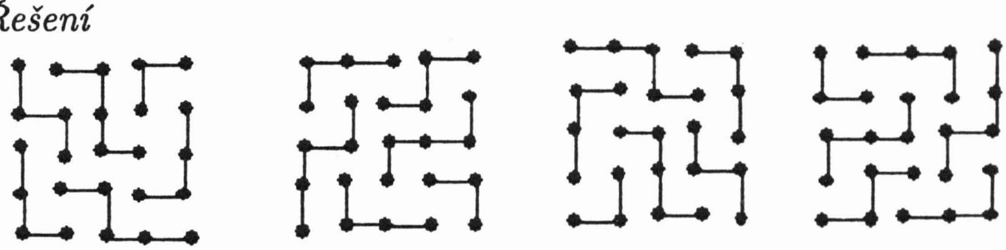
Obrázek 8: Čtverec



Obrázek 9: Grafové kódování

Úlohu je možno přeformulovat následovně: do čtvercové sítě tvořené 25 body umístěte 6 daných grafů tak, aby žádné dva neměly ani jeden společný uzel a byly využity všechny body dané sítě.

Řešení



Obrázek 10: Umístění grafů v síti bodů

Výběr následujících dvou úloh byl inspirován [Pl].

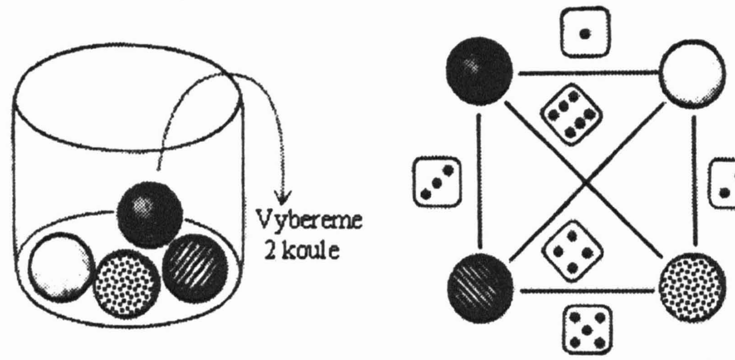
Úloha 7

Jak simulovat hod klasickou hrací kostkou?

Problém 1:

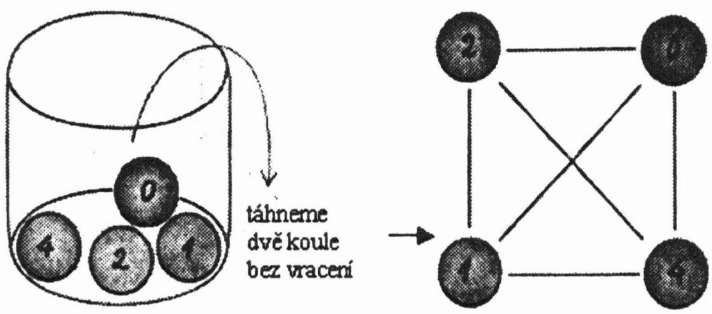
Klasická hrací kostka má pravidelný tvar krychle, na každé stěně je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Představme si, že kostku ztratíme a potřebujeme simulovat hod kostkou pomocí 4 koulí různé barvy. Koule umístíme do urny a táhneme 2 z nich. Tažené koule nevracíme zpět.

Řešení



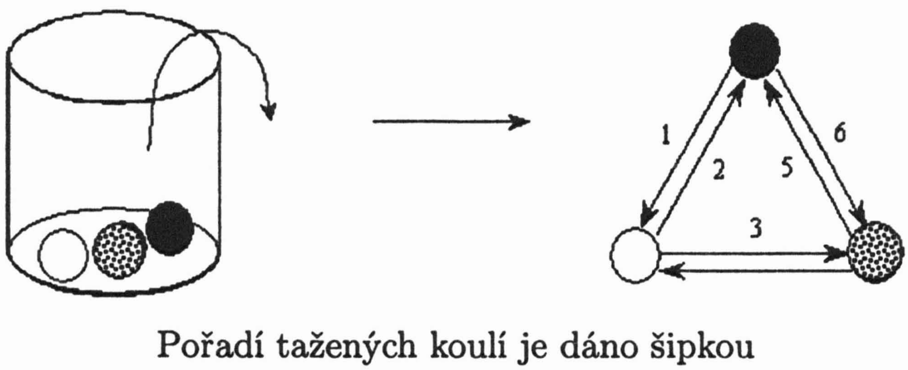
Problém 2:
Máme k dispozici 4 stejné koule. Jak je možné nyní simulovat hod kostkou?

Řešení
Očíslujeme koule tak, aby při vzájemné kombinaci čísel bylo možno získat číslice 1 až 6. Táhneme 2 koule bez vracení.



Problém 3:
K dispozici máme 3 koule různé barvy. Jak nyní můžeme simulovat hod kostkou?

Řešení
Záleží na pořadí, v jakém bude koule tažena, což demonstrujeme orientovaným grafem.



Pořadí tažených koulí je dáno šipkou

Úloha 8: Pravděpodobnost výhry

Problém 1:

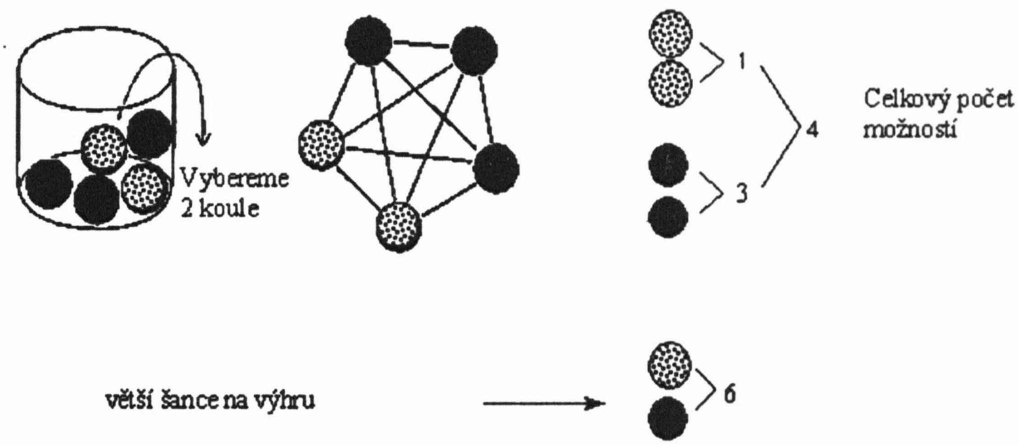
V urně jsou 3 černé a 2 červené koule. Vytáhneme 2 koule (tažené koule nevracíme do urny):

Petr (P) vyhrává, jsou-li obě tažené koule stejné barvy.

Milan (M) vyhrává, jsou-li obě tažené koule různé barvy.

Který z hochů má větší šanci vyhrát?

Řešení



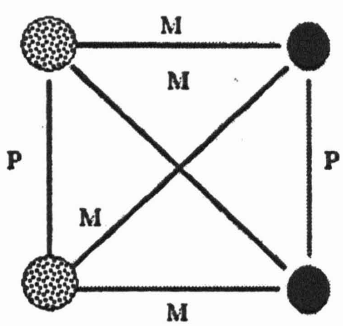
Problém 2:

V urně jsou 2 červené a 1 černá koule. Podmínky výhry pro Petra a Milana jsou stejné jako v předchozím problému. Který z hochů má větší šanci vyhrát?

Řešení

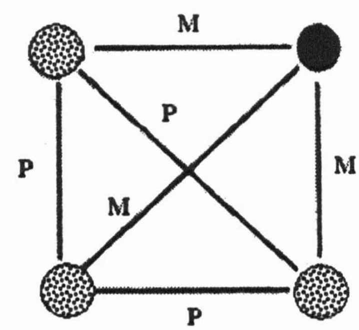
Větší šanci na výhru má Milan.

Problém 3:
Jakou kouli musíme přidat do urny, aby hra byla spravedlivá?
Řešení



M. . . 4 možnosti
P. . . 2 možnosti

Nespravedlivá hra
(větší šanci má Milan)



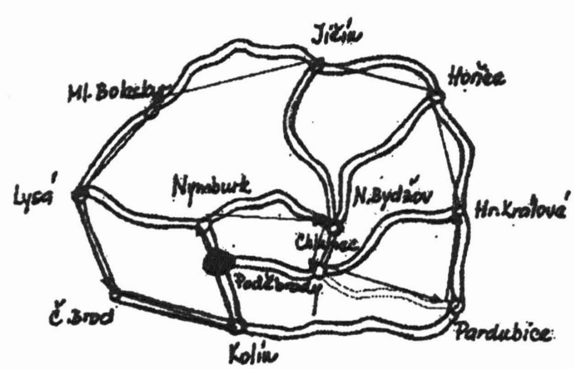
M. . . 3 možnosti
P. . . 3 možnosti

Spravedlivá hra
(šance na výhru jsou stejné)

Úloha 9
Nacházíš se v Poděbradech. Rozhodl/a ses navštívit všechna uvedená města na plánku. Chceš využít pouze vyznačených silnic hlavních směrů dopravy a nehodláš projíždět městy vícekrát.

a) Zakresli přímo do obrázku pomocí šipek směr jízdy. Začínáš v Poděbradech.

b) Je možné, abys projel/a všemi vyznačenými silnicemi přitom navštívil/a každé město pouze jednou?



Řešení

a) V podstatě se jedná o sestrojení tzv. hamiltonovské kružnice v daném grafu. Na obrázku je kružnice umístěna přímo do mapky.

b) Jde o možnost sestrojení grafu jedním tahem, což v tomto případě nelze. Počet uzlů lichého stupně převyšuje 2.

Úloha 10

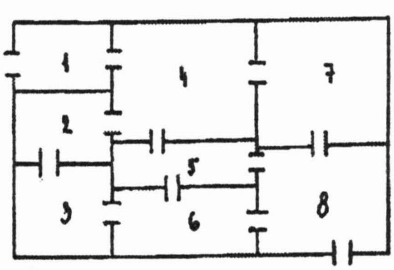
Představ si, že jsi průvodcem na zámku. Určitě víš, že se nesmí v jednotlivých komnatách zbytečně chodit, aby nedošlo k jejich poškození. Máš provést skupinu turistů všemi komnatami podle plánku, který je nakreslený dole. Začínáte v místnosti č. 1, máte projít každými vnitřními dveřmi nejvýše jednou a vyjít máte z místnosti č. 8. Do jedné místnosti se může vstoupit víckrát, ale ve tvém zájmu je, aby vstupů bylo co nejméně.

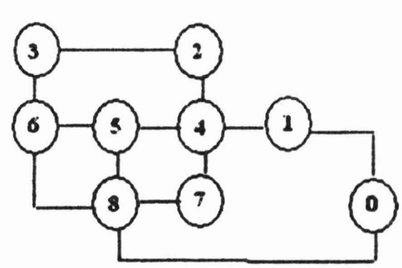
a) Najdi trasu prohlídky.

b) Je možné začít v místnosti č. 1 a vyjít z místnosti č. 8 tak, abychom prošli všemi dveřmi právě jednou? Pokud to nejde, šlo by někde přidělat další dveře, aby to šlo?

Řešení

Jedna z možností, jak překreslit plánek zámku, je na následujícím obrázku. Pomocí tohoto grafu je možné nalézt směr prohlídky.

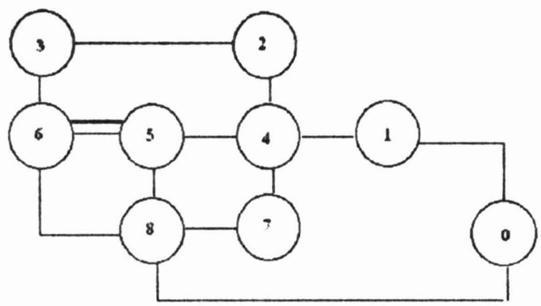




Uzly grafu jsou shodně očíslované s místnostmi, hrana grafu odpovídá spojovacím dveřím. Uzel označený jako „0“ odpovídá vnějšímu okolí, odkud je možné vstoupit, resp. vystoupit z místností č. 1 a 8.

Možná trasa prohlídky: 0-1-4-5-6-3-2-4-7-8-0.

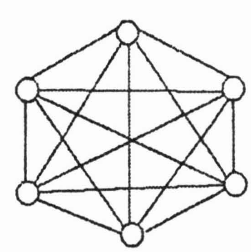
Podmínku b) nelze dodržet; v grafu se nacházejí dva uzly lichého stupně 5, 6 – jeden z nich by musel být vstupní a druhý výstupní. Dveře nutno přidělat tak, aby všechny uzly měly např. sudý stupeň. Jedna z možností je na obrázku vyznačena silněji. Další krok spočívá v tomto případě v nalezení eulerovského uzavřeného tahu; 0-1-4-2-3-6-5-4-7-8-6-5-8-0.



Úloha 11: Sportovní soutěže

Problém 1:
Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

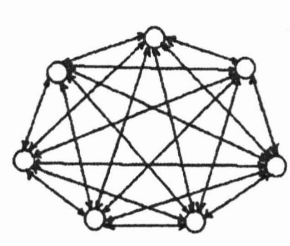
Řešení



Jde o vytvoření úplného neorientovaného grafu na šesti uzlech, jak ukazuje obrázek – počet hran je 15. Při výpočtu je možné využít kombinačních čísel: $\binom{6}{2} = 15$.

Problém 2:
Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?

Řešení



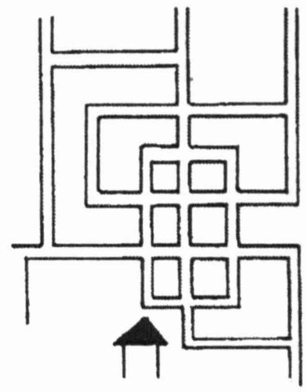
Jedná se o vytvoření úplného orientovaného grafu. Vzhledem k podmínkám úlohy jsou šipky obousměrné. Celkový počet zápasů je dvojnásobný , tj. $2 \cdot \binom{7}{2} = 42$.

Úloha 12

Představ si, že kropící vůz má projet městskými ulicemi uvedenými na obrázku. Aby byly náklady na kropení ulic co nejmenší, bylo by účelné, aby kropící vůz projel každou ulicí pokud možno jen jednou.

a) Podaří se kropícímu autu projet každou ulicí pouze jednou?

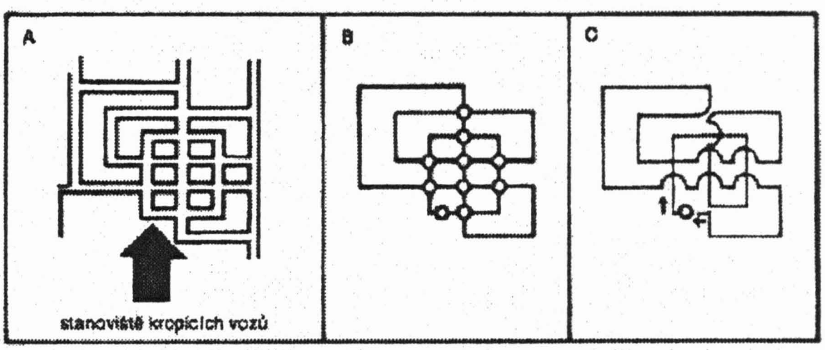
b) Dal by se plánek překreslit jednodušším způsobem?



Stanoviště vozů

Řešení

Překreslením plánku A pomocí grafu B zjistíme, že se jedná o hamiltonovský graf. Průjezd městem je na schématu C. (Podle [Op].)



Úloha 13: Jednotažky

Problém 1:

Určitě jsi již někdy kreslil/a nějaké obrázky jedním tahem. Podívej se na následující obrázky a zakroužkuj ty z nich, které se ti podaří jedním tahem nakreslit.

Řešení

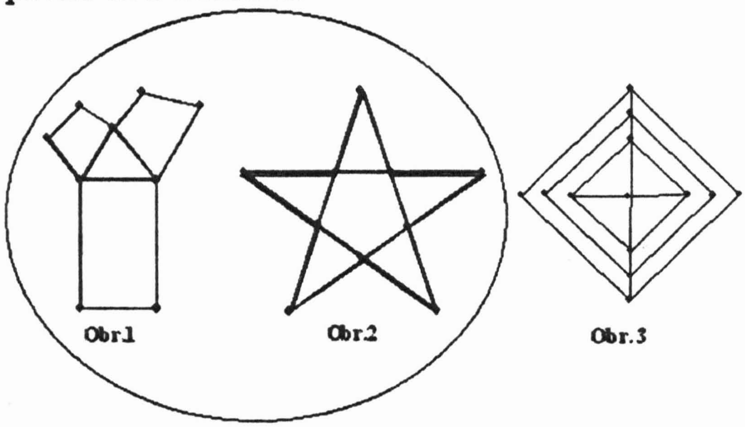
Ve všech případech se jedná o hledání eulerovského tahu.

Problém 2:

Mirek velmi rád a často pomáhá mamince s věšením prádla. Pokaždé natahuje šňůru znovu na kolíky, které přibírá nebo ubírá, rozestavuje a tvoří nové obrazce. Prádlo potřebuje místo a šňůra nesmí jít nikde dvojmo. Může vytvořit všechny obrazce, které si předkreslil (viz obr. 1 až 3)?

Řešení

Opět se jedná o nalezení eulerovského tahu v daném grafu. Vytvořit lze první dva obrazce.



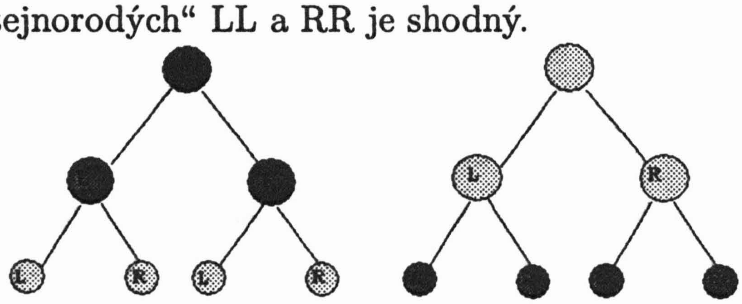
Úloha 14: Hod mincí

Problém 1:

Házíme dvěma stejnými mincemi. Je větší pravděpodobnost, že po dopadu bude na obou mincích totéž (Rub – znak nebo Líc – číslo) nebo že na každé minci bude něco jiného?

Řešení

Pravděpodobnost je stejná; počet smíšených dvojic typu RL a dvojic „stejnorodých" LL a RR je shodný.



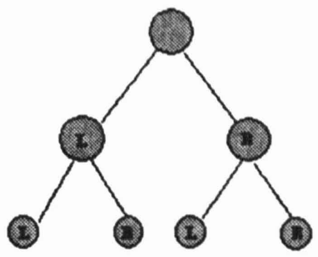
Problém 2:

Házíme nyní jednou mincí dvakrát. Rozhodni, která z možností je pravděpodobnější:

1. padne dvakrát totéž, tj. 2krát znak nebo 2krát číslo
2. při každém hodu padne něco jiného

Řešení

Obě možnosti jsou stejně pravděpodobné, jak ukazuje obrázek. Počet vzájemných „stejnorodých" kombinací LL, RR je 2, „nestejnorodých" RL také 2.



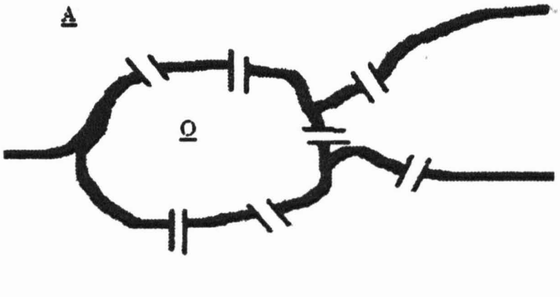
Úloha 15

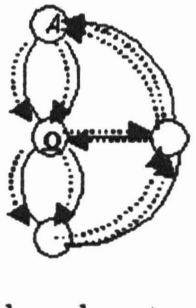
Přes řeku Pregel vede sedm mostů, z nichž pět vede na ostrov (O). Situace je zakreslena na obrázku.

1. Bylo by možné udělat takovou procházku, při níž by se všechny mosty přešly pouze jednou a žádný nebyl vynechán? Svoji odpověď zdůvodni.
2. Jak musíme jít, když má procházka začít a skončit v bodě A, žádný most se nesmí vynechat a co nejméně mostů se má projít dvakrát?

Řešení

Obrázek je možné překreslit pomocí grafu, kde hrany odpovídají mostům a jednotlivé oblasti, které řeka vzájemně odděluje jsou uzly. Ostrov a výchozí místo jsou v grafu shodně označené.





1. Hledáme eulerovský tah. Ten však vzhledem ke stupňům jednotlivých uzlů neexistuje, tedy procházka možná není.
2. Možné řešení je vyznačeno přímo do grafu.

Literatura

[He] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990.

[Ko] Koman, M., *Dejte hlavy dohromady a řešte úlohy*, Edice Praxe učitele matematiky-fyziky-informatiky, Prometheus, 1995.

[Kop] Kopka, J., *Hrozny problémů ve školské matematice*, Univerzita J. E. Purkyně Ústí nad Labem, 1999.

[Op] Opava, Z., *Matematika kolem nás*, Albatros, Praha, 1989.

[Pe] Perný, J., Krychle, pohyb a prostorová představivost, *Učitel matematiky*, **12**(3,4) 2004, 176–183, 221-230.

[Pl] Plocki, A., *Pravděpodobnost kolem nás – počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*, Univerzita J. E. Purkyně Ústí nad Labem, 2001.

[Př1] Příhonská, J., *Teorie grafů v učivu základní školy*, In: Sborník konference „Matematika v príprave učiteľov 1.st. ZŠ", Univerzita Mateja Bela Banská Bystrica, 2001, s. 40-46.

[Př2] Příhonská, J., *Graf jako nástroj porozumění matematickým myšlenkám (didaktická analýza)*, disertační práce, PedF UK Praha, 2004.

[Pří] Příhonská, J., *Řešitelské strategie s využitím teorie grafů v učivu základní školy*, In: Sborník konference „Matematika v přípravě učitelů primární školy", Univerzita Palackého v Olomouci, 2002, s. 149–153.

[PřVi] Příhonská, J., Vild, J., *Hasseovské diagramy ve výuce*, In: Sborník mezinárodní konference kateder matematiky připravujících učitele matematiky. TU v Liberci, září 2000, s. 91–96.

[ViPř] Vild, J., Příhonská, J., *(Applications of) Discrete Mathematics in (Presentation of) Discrete Mathematics*, In: Sborník konference „$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$?", TU v Liberci, únor 2002, s. 67–74.

[Ve] Vejmola, S., *Konec záhady hlavolamů*, SPN, Praha, 1986.

RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
TUL v Liberci
Hálkova 6, 461 17 Liberec
e-mail: jana.prihonska@vslib.cz