Arne Vrbský

Turbodidaktika 4

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 2, 124–128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150757

TURBODIDAKTIKA 4

DOC. ARNE VRBSKÝ
ZEMĚDĚLSKÁ AKADEMIE, GRÜNFELD, SRN[6]

Cílem článku, který uzavírá krátký seriál o turbodidaktice (dále jen TDi) je důkaz *Kvadratické věty* (dále jen KV). Po dohodě s redakční radou bude uvedena pouze část důkazu. Konkrétně bude KV dokázána pro kladná reálná čísla, což umožní používat prostředků elementární matematiky a důkaz tak bude přístupný učitelům matematiky na základních a středních školách. Kompletní důkaz je založen na morfismu jistých grup a bude publikován v časopise „Kleeblatt". Přistupme tedy k důkazu KV.

Kvadratická věta.

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = x \cdot x$$

Důkaz: Kdyby důkaz prováděli didaktici matematiky, tak by zřejmě vyšli z výrazu x^2 a pomocí řetězce implikací by dospěli k výrazu $x \cdot x$. Potom by si odpočinuli. Dále by vyšli z výrazu $x \cdot x$ a pomocí řetězce implikací by dospěli k výrazu x^2. Po chvíli by napsali $x^2 = x \cdot x$. To je sice pravda, ale je to příliš odtrženo od praxe. TDi naopak z praxe důsledně vychází. Zkušený učitele ví, že na otázku „Jak postupovat?" dostane zpravidla odpověď „Nevím", popř. v početnější třídě „Nevíme." Protože první písmeno ve slově nevím je n, chytře toho využijeme a napíšeme ihned

$$x \cdot x = x^n. \tag{19}$$

Ukážeme, že $n = 2$. Na vztah (1) nyní použijeme algoritmus *VTA*, což je známá zkratka pro *Vrbského turbodidaktický anulátor*. Vlastenecky orientovaní čeští matematici používají někdy zkratku

[6] Jak jsme již nejednou uvedli, je doc. Arne Vrbský nápadně podobný vedoucímu redaktorovi dr. Dagovi Hrubému a proto s ním bývá často zaměňován.

ANPSBN (aby na pravé straně byla nula). Aplikace algoritmu *VTA* vede ke vztahu

$$x \cdot x - x^n = 0. \tag{20}$$

Nyní můžeme elegantně vytknout x a dostat tak oblíbený součinový tvar

$$x \cdot (x - x^{n-1}) = 0. \tag{21}$$

Snad je zřejmé, že buď $x = 0$ nebo $x - x^{n-1} = 0$. Je-li $x = 0$, pak také $x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$ a podobně $x^n = 0^n = 0$. Poslední rovnost platí pro každé n, tedy také jistě pro $n = 2$ a KV je tak dokázána pro $x = 0$. Nyní se soustředíme na vztah

$$x - x^{n-1} = 0. \tag{22}$$

Vidíme, že opět můžeme elegantně vytknout x a dostat tak oblíbený součinový tvar

$$x \cdot (1 - x^{n-2}) = 0. \tag{23}$$

Snad je zřejmé, že buď $x = 0$ nebo $1 - x^{n-2} = 0$. Případ $x = 0$ máme již šťastně za sebou, a proto se budeme zabývat vztahem

$$1 - x^{n-2} = 0. \tag{24}$$

V tomto případě použijeme algoritmus *VTDA*, což je známá zkratka pro *Vrbského turbodidaktický deanulátor*. Vlastenecky orientovaní čeští matematici používají někdy zkratku *ANPSNN* (aby na pravé straně nebyla nula). Aplikace algoritmu *VTDA* vede ke vztahu

$$x^{n-2} = 1. \tag{25}$$

Připomeňme, že $x > 0, n \in \mathbb{N}$. Po logaritmování dostáváme

$$(n-2) \cdot \ln x = \ln 1,$$
$$(n-2) \cdot \ln x = 0,$$

Zřejmě je $\ln x = 0$ nebo $n - 2 = 0$. Je-li $\ln x = 0$ potom je $x = 1$ a také $x \cdot x = 1 \cdot 1 = 1$ a podobně $x^n = 1^n = 1$. Poslední rovnost platí pro každé n, tedy také pro $n = 2$ a KV je tak dokázána pro $x = 1$. Je-li $n - 2 = 0$, potom je $n = 2$, což jen potvrzuje předcházející úvahy. V tuto chvíli máme dokázanou KV pro $x = 0$ a $x = 1$. Nechť je nyní $x \in R^+, x \neq 1$. Položíme-li $x = e^{\ln x}$ můžeme ihned psáti

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &= x^n, \\
e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} &= \left(e^{\ln x}\right)^n, \\
e^{2 \ln x} &= e^{n \ln x}, \\
2 \cdot \ln x &= n \cdot \ln x, \\
2 \cdot \ln x - n \cdot \ln x &= 0, \\
(n-2) \cdot \ln x &= 0, \\
n &= 2.
\end{aligned}
$$

Bedlivý čtenář pochopil, že v předposlední rovnosti jsme krátili výrazem $\ln x$, který je vzhledem k podmínkám vždy ruzný od nuly. Tím je důkaz KV pro kladná reálná čísla u konce.

V souvislosti s důkazem KV bych rád poznamenal, že v době, kdy jsem nosil v hlavě ještě nejasné obrysy důkazu KV, měl jsem několik diskusí take s členy klubu Paracelsus v jejich klubovně v restauraci „Na Dvorci“, kterou nazývají, pro mne z neznámých důvodů, také jako restauraci „U mrtvoly“. Tato luxusní restaurace 5. cenové skupiny se nachází v obci Jevíčko v ČR na Moravě v Pardubickem kraji, který leží v Čechách. Tyto diskuse probíhaly v roce 2003 v rámci 6. semináře z historie matematiky, na kterém jsem vedl jednu přednášku. Tuším, že již po prvním pivu vystoupil přítomný doc. dr. Jindřich Bečvář, CSc., z obce Praha s návrhem, zda by neměla být KV psána ve tvaru

$$x^2 = x^1 \cdot x^1$$

Jeho návrh vyvolal značný rozruch, při kterém padala i slova, která nelze publikovat. Po druhém pivu byl docent Bečvář vyzván, aby svůj návrh objasnil. Jeho výklad by bylo možné nazvat jako střet dimenzí. Již po třetím pivu bylo všem přítomným z jeho výkladu jasné, že při násobení dvou identických objektů dimenze 1 dostáváme objekt dimenze 2. Vzpomeňme jen jak počítáme obsah čtverce. Délka strany (objekt dimenze 1) krát délka strany (objekt dimenze 1) = obsah čtverce (objekt dimenze 2). V době, kdy si členové klubu Paracelsus objednávali čtvrté pivo, jsem společnost potichu opustil a vrátil se do hotelu Hilton, kde jsem byl ubytován. Byl jsem silně rozrušen, protože jsem si uvědomil, že docent Bečvář, aniž by to tušil, použil ve vhodné situaci Tesákovu větu, 1+1=2. Věděl jsem v tu chvíli, že stačí ukázat, že platí $x^1 = x$ a Bečvářova hypotéza bude dokázána. Jinými slovy, že vedle *Kvadratické věty* musí existovat také *Lineární věta*

Je zajímavé, že didaktika matematiky vztahu $x^1 = x$ nevěnuje prakticky žádnou pozornost. Maximálně se s mocninou x^1 můžeme setkat při rekurentní definici n-té mocniny: $x^{n+1} = x^n \cdot x$, $x^1 = x$. Zde je vztah $x^1 = x$ podán definitoricky. Vyslovme nyní a dokažme LV (Lineární větu).

Lineární věta.

$$\forall a \in \mathbb{R} : a^1 = a$$

Důkaz: Didaktický přístup, kdy úpravou výrazu a^1 dospějeme řetězcem implikací k výrazu a a po krátkém odpočinku úpravou výrazu a dospějeme řetězcem implikací k výrazu a^1, by nám v tomto případě moc nepomohl. TDi vychází důrazně ze školské praxe. Zkušený turbodidaktik ví, že na otázky učitele odpovídají žáci většinou slovem „nevím“. V matematice označujeme slovo „nevím“ písmenem x. Můžeme proto ihned psáti

$$\begin{aligned} a^1 &= x, \\ 1 \cdot \ln a &= \ln x, \\ \ln a &= \ln x, \\ a &= x, \\ a^1 &= a. \end{aligned}$$

Znalci cítí, že důkaz *Lineární věty* je sice formálně v pořádku, nicméně rovnost $1 \cdot \ln a = \ln a$, které je při důkazu použito, představuje nejslabší článek důkazu. Předpokládá už jistou matematickou erudici. Konkrétně se jedná o neutrální prvky v jistých multiplikativních grupách. Naštěstí je možné se grupám vyhnout. Pro zasvěcené nebude překvapením, že řešení problému přináší *Tesákova věta*

$$1 + 1 = 2.$$

Vynásobíme-li totiž obě strany rovnosti výrazem $\ln a$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 1 \cdot \ln a + 1 \cdot \ln a &= 2 \cdot \ln a, \\ 2 \cdot (1 \cdot \ln a) &= 2 \cdot \ln a, \\ 1 \cdot \ln a &= \ln a. \end{aligned}$$

Tímto důkazem končí naše malá exkurze do TDi. Pečlivý čtenář pochopil, že v pozadí všech úvah je skryta *Tesákova věta*, která je skutečným turbodidaktickým fenoménem, a proto je oprávněně nazývána *Základní větou turbodidaktiky* a řadí se tak vedle *Základní věty algebry* a *Základní věty aritmetiky* ke zlatému fondu matematiky. V této trojici slavných matematických vět zaujímá *Tesákova věta* třetí místo, ale my turbodidaktici cítíme, že není daleko doba, kdy se ukáže, že *Základní věta algebry* a *Základní věta aritmetiky* jsou důsledky *Tesákovy věty.* Je to výzva zejména pro Matematický ústav AV ČR. Z druhé strany je nutno poznamenat, že se současně blíží doba, kdy *Tesákova věta* bude nejen minimem, ale take maximem matematických znalostí absolventů našich středních škol. *Tesákova věta* bude jediným prvkem tzv. minimaxu.