István Lénárt

Projekt „srovnávací geometrie” (rovina - sféra - hemisféra) (2)

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 2, 75–83

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150754`

PROJEKT „SROVNÁVACÍ GEOMETRIE“ (ROVINA – SFÉRA – HEMISFÉRA) (2)

ISTVÁN LÉNÁRT

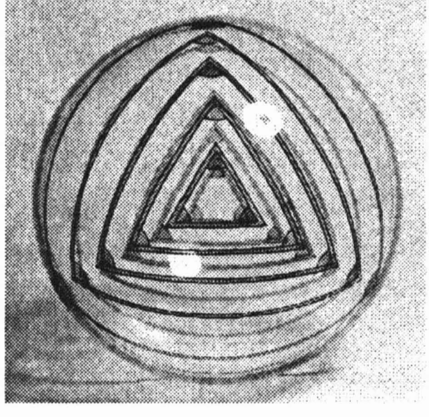
Dokončení z minulého čísla

Součet úhlů v trojúhelníku

Budeme se zabývat pouze rovnostrannými trojúhelníky.

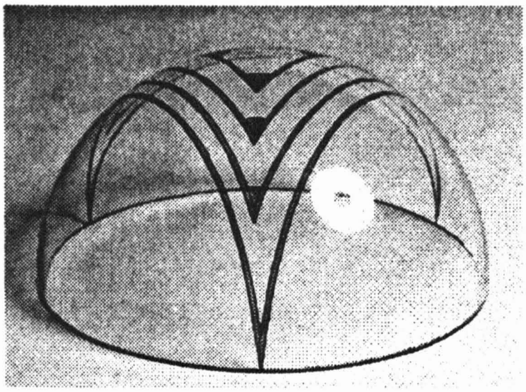
V rovině je vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníku vždycky 60°, ať je trojúhelník malý nebo velký. Součet úhlů v trojúhelníku je tedy 180°.

Na kouli se úhly zvětšují, jak se zvětšují trojúhelníky (viz obr. 14). Malé trojúhelníky se podobají rovinným trojúhelníkům, takže jejich úhly mají blízko k 60°. Velké trojúhelníky se spíše podobají hlavním kružnicím, takže jejich úhly jsou blíže ke 180°. Součet úhlů v trojúhelníku se tak pohybuje od $3 \cdot 60° = 180°$ do $3 \cdot 180° = 540°$. Ani jednu z krajních hodnot, 180° a 540°, dosáhnout nemůže. „Rovnostranným trojúhelníkem“, jehož součet úhlu je 540°, by byla polosféra. Hranicí takového „trojúhelníka“ by byla jedna hlavní kružnice a jeho vrcholy by byly tři rovnoměrně rozložené body na této kružnici.



Obr. 14

Na polokouli se úhly zmenšují, jak se trojúhelníky zvětšují (viz obr. 15). Malé trojúhelníky se spíše podobají rovinným trojúhel-



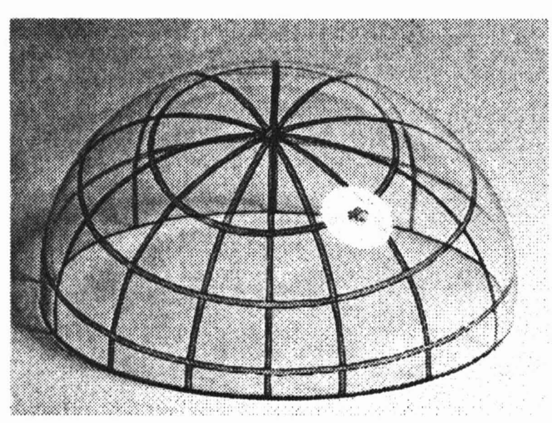
Obr. 15

níkům, takže jejich úhly jsou blíže k 60°. Velké trojúhelníky jsou stále „špičatější“, takže jejich úhly se blíží k 0°. Součet úhlů v trojúhelníků se tedy pohybuje od $3 \cdot 60^\circ =$ $= 180^\circ$ do $3 \cdot 0^\circ = 0^\circ$. Ani jednu z krajních hodnot dosáhnout nemůže.

Kružnice a cykly

Kružnice se v rovině i na kouli konstruují jednoduše, ale umíme kreslit kružnice i na polokouli? Je obtížnější znázornit zde oblouky stejné velikosti, takže nemůžeme nakreslit body, které mají od středu stejnou vzdálenost. Zkusíme to tedy jinak. Vezměme svazek přímek a nakresleme spojitou křivku, která je kolmá ke každé přímce svazku. Takto získáme v rovině a na kouli kružnice, jejichž střed leží ve společném průsečíku svazku.

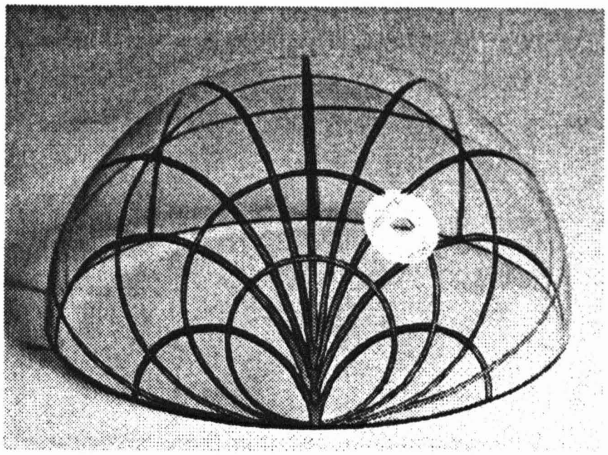
A na polokouli? Obr. 16 ukazuje, že tímto způsobem dostaneme kružnice, ale jejich střed nějak unikl ze svého „obvyklého“ místa. Ještě lépe je to vidět na obr. 17. Společný střed kružnic leží na rovníku, ale body na rovníku nepatří do naší geometrie.



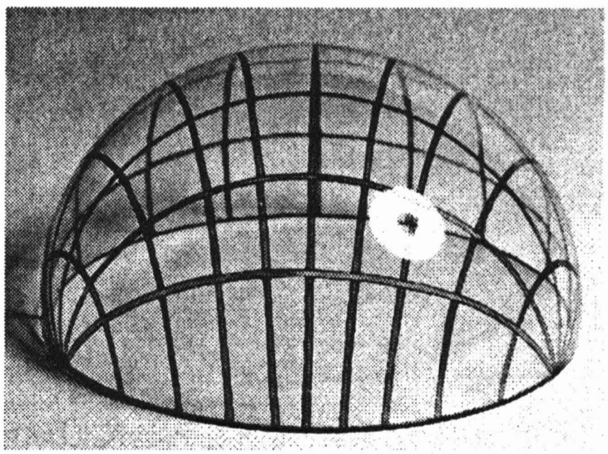
Obr. 16

To znamená, že jediný možný kandidát na střed těchto kružnic není zahrnut v modelu. Nemůžeme se vyhnout závěru, že tyto kružnice nemají v naší geometrii žádný střed! Kružnice, které se dotýkají rovníku, se nazývají *paracykly.*

Třetí typ svazku na obr. 18 přináší pouze oblouky kružnic se dvěma konci na rovníku. Tyto oblouky se nazývají *hypercykly.*



Obr. 17



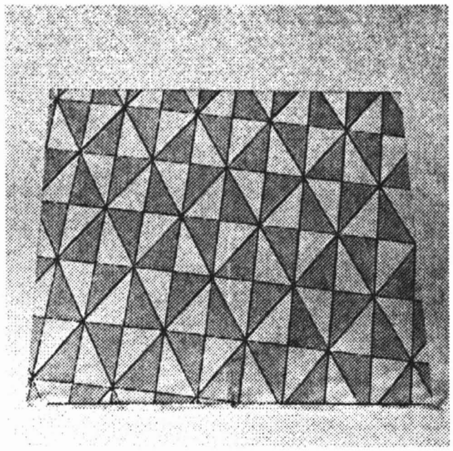
Obr. 18

Mozaiky a dlaždice

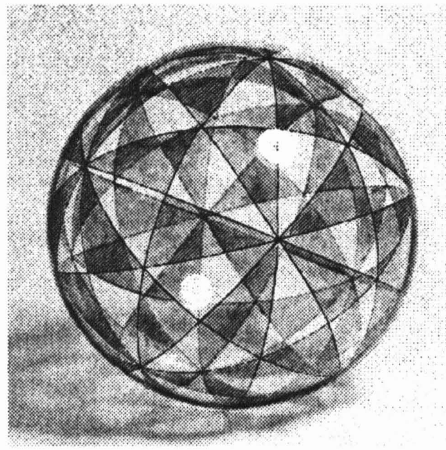
Nyní budeme pokrývat povrch shodnými mnohoúhelníky, které se navzájem nepřekrývají a mezi nimiž nezůstává mezera.

Na obr. 19 je příklad dláždění rovinnými trojúhelníky s úhly 90°, 60° a 30°. Na obr. 20 je dláždění na sféře trojúhelníky s úhly 90°, 60° a 36° a na obr. 21 je dláždění na polokouli trojúhelníky s úhly 90°, 45° a 30°.

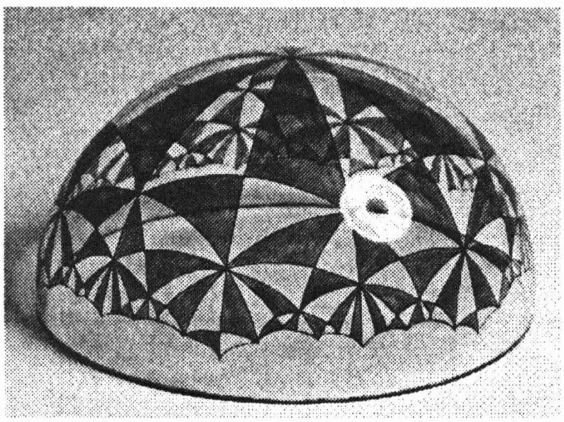
V rovině a na kouli se shodné trojúhelníky zdají být shodné. Na polokouli se zdá, že se strany směrem k rovníku zmenšují, protože se jednotkové vzdálenosti zdají být kratší a kratší. Shodné úhly se však zdají být shodné. Strany mohou oklamat náš zrak, ale úhly vždycky říkají pravdu!



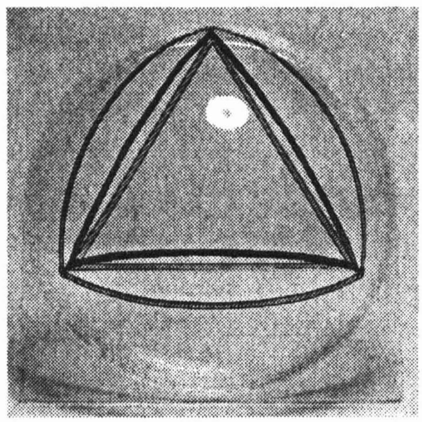
Obr. 19



Obr. 20



Obr. 21



Obr. 22

Kterou geometrii použít?

Kterou geometrii by měla nepatrná bytost, jakou je člověk v porovnání se Zemí, použít k popisu světa, v němž žije? Označte si na povrchu koule tři body (viz obr. 22), spojte je přímkami, o nichž si myslíte, že jde o nejjednodušší přímky, změřte úhly a sečtěte je. Pokud je součet 180°, pak můžeme použít eukleidovskou geometrii. Pokud je to více, pak lze použít sférickou geometrii. A pokud je součet méně než 180°, pak je nejlépe použít hyperbolickou geometrii polokoule.

3. Historie projektu a dosažené výsledky

Matematickými a didaktickými souvislostmi projektu se zabývám od roku 1996. Konkrétní výukové experimenty probíhají od roku 1982. První varianta sférické rýsovací soupravy spatřila světlo světa v Maďarsku roku 1986. Výrazně zdokonalenou soupravu vydalo pod názvem Lénárt Sphere kalifornské nakladatelství Key Curriculum Press v roce 1996, téhož roku vyšla také anglicky psaná učebnice. Tato nová souprava je na trhu v Maďarsku od roku 1998; učebnice v maďarštině vyšla o rok později.

Materiál sloužil po léta podnikavým učitelům a studentům jako určitá lahůdka, zajímavost. Dodnes se nestal povinnou učební látkou. O to jsem ani neusiloval, protože jsem přesvědčen, že takový výukový program může přinést pozitivní výsledky pouze za předpokladu houževnaté práce, při dobrovolném přesvědčení žáků i učitelů o správnosti takové volby. Vnucenou, jen s poloviční chutí přijímanou povinnost pokládám nejen za zbytečnou, ale za vysloveně škodlivou z hlediska projektu i jeho účastníků.

Z toho všeho plyne, že dosud nemám k dispozici statisticky přesvědčivé údaje. Níže uvedený popis účastníků projektu tedy nemá kvantitativní, nýbrž kvalitativní charakter.

Pedagogičtí badatelé, pedagogové: Od konce 70. let minulého století, kdy se mnou Ferenc Kárteszi poprvé hovořil o matematických a didaktických možnostech projektu, se mnozí odborníci na vyučovací techniky vyjadřovali o tomto tématu příznivě, často dokonce s nadšením. V mnoha zemích světa znám učitele a badatele v oblasti pedagogiky, kteří se již pokusili projekt zavést.

Pedagogičtí adepti – matematici: V rámci „Skupiny pro odbornou metodologii v matematice“ při Univerzitě Loránda Eötvöse vedu od roku 1990 dva jednosemestrální specializované semináře pro dobrovolné zájemce z řad studentů třetích, čtvrtých a pátých ročníků. Počet mých posluchačů vzrostl za uplynulá léta z původních pěti nebo šesti na třicet až čtyřicet. Jsou to mladí lidé, kteří velmi pozitivně přijímají téma, jež se z roku na rok utváří a mění. Mám k dispozici příznivé ústní i písemné ohlasy, tématikou se zabývalo již několik posluchačů v seminárních pracích.

Nemálo mých posluchačů se mi svěřilo s tím, že jejich v podstatě formální neeukleidovské znalosti se až nyní přetvořily na operativní vědomosti způsobilé k dalšímu rozvíjení. Moji posluchači nepovažovali za dětinskou nebo nedůstojnou manipulační aktivitu. Právě naopak, po prvních hodinách doslova vyžadovali alespoň nějakou formu experimentu na kouli. Tato experimentální činnost mimořádně stimuluje samostatné myšlení a jednání. Mezi nejkrásnější okamžiky mé pedagogické práce patří ty chvíle, kdy se stávám figurou v pozadí a jen pozoruji své studenty, jak společně pracují, diskutují a s vervou argumentují. Posluchači oborů matematika – fyzika, respektive matematika – zeměpis často poukazují na dobrou využitelnost zde osvojených znalostí a způsobu nazírání ve svém druhém oboru.

Pedagogičtí adepti – nematematici: Od roku 1998 přednášíme spolu s kolegyní zmíněný projekt v modifikované podobě v rámci dvousemestrálního cyklu studentům Pedagogické fakulty Univerzity Loránda Eötvöse. Ani obsahově, ani svými cíli se tento kurz nepřekrývá se specializovanými semináři pro budoucí učitele matematiky. Matematická průprava a znalosti posluchačů, kteří jej navštěvují, jsou nižší a také jejich vztah k matematice a jejich zkušenosti s tímto předmětem jsou často zatíženy konflikty a domnělými nebo skutečnými křivdami z minulosti, nedostatkem sebedůvěry. Mnohdy cítím, že se ke svým studentům musíme dostávat přes vysokou zeď nedůvěry, ba dokonce nesympatií.

V popředí našich cílů tedy stojí úkol přivést posluchače k tomu, aby si mohli předmět zamilovat, představit jim vědu, která je v neustálém pohybu, zvýšit úroveň jejich znalostí z planimetrie a zdůraznit hravé prvky manipulačních aktivit.

Skupina 12–18letých: Na této úrovni je projekt využitelný ve dvojí podobě. Může se uskutečnit v poměrně krátké formě čtyř až šesti lekcí jako „Úvod do sférické geometrie“, při němž jsou vedle oficiální učební látky předvedeny zajímavé podrobnosti jako určitá matematická kuriozita. Druhým, mnohem významnějším způsobem je zabudování neeukleidovské geometrie do eukleidovské jako její součást, kdy dochází k průběžné konfrontaci pojmů a kdy se otázky typu: „A jak to vypadá na kouli (respektive později na polokouli)?“ stávají naprostou samozřejmostí. Obě metody byly v uplynulých letech hojně využívány. Ve valné většině případů zazněly jak ze strany studentů, tak ze strany vyučujících velmi kladné názory a soudy. V zájmu objektivity je ovšem třeba přiznat, že míra zápalu i úroveň matematických i pedagogických znalostí u kolegů, kteří se takového experimentu zúčastňují, je obvykle vyšší než průměr, takže obecné závěry lze vyvozovat jen s nejvyšší opatrností.

4. Výstava u příležitosti oslav milénia

Prosím ctěné čtenáře, aby mi prominuli malou odbočku od tématu, inspirovanou čerstvými dojmy, o něž bych se rád podělil. V roce 2001 byla v Budapešti otevřena expozice, která představuje několik stovek vynikajících tvůrčích maďarských osobností. Figuruje mezi nimi také maďarský matematik János Bolyai, jehož 200. výročí narození jsme oslavili. Byl jsem poctěn úkolem představit jeho činnost nejširší veřejnosti. S pomocí metody srovnávací geometrie, v rovině, na sféře a hemisféře jsem návštěvníkům vyložil některé základní pojmy ve třech geometrických systémech. Kromě prezentovaných modelů měla veřejnost možnost vyslechnout i krátké přednášky.

Za první dva měsíce navštívilo expozici na sto třicet tisíc diváků. S plným vědomím vlastní zodpovědnosti tvrdím, že rozhodující většina těchto návštěvníků do expozice Bolyaiho alespoň letmo nahlédla a nezalekli se, když zaslechli slova jako matematika nebo geometrie. Nezasvěcená veřejnost se s matematickým tématem setká jen zřídka. Podle mých zkušeností ale matematika lidi zajímá. Zajímá je jednak sama tato věda a její aplikace, jednak v ní spatřují prubířský kámen své chápavosti a výzvu svým intelektuálním schopnostem.

5. Problém

Je-li tento projekt natolik užitečný a radostný pro žáky, proč se ve vzdělávacích institucích nešíří rychleji? Rád bych uvedl tři hlavní překážky.

První překážkou jsou finance, souprava není právě levná. Druhou překážku tvoří nedostatek času a energie pedagogů, kterými jsou většinou ženy se starostmi o rodinu. Třetí, patrně nejdůležitější překážkou je neomylnost. Projektem se zabývám několik desítek let a dodnes se mi stává, že mi některý z deseti či dvanáctiletých žáků položí otázku, na kterou jsem schopen odpovědět jen obtížně nebo taky vůbec. Pokládá-li učitel matematiky neomylnost za svou takříkajíc úřední povinnost, pozoruje-li zápolení svých studentů pouze zpoza pevné hradby svých nabiflovaných a nenapadnutelných znalostí, potom se nepochybně jen nerad pustí na rozlehlejší, ale zároveň riskantnější pole srovnávací geometrie. To platí obzvláště o těch učitelích, pro něž látka osvojená na univerzitních studiích nepředstavuje víc než mrtvé znaky, od nichž není dovoleno, ani radno se odchylovat.

6. Závěr

Již delší dobu se v didaktice matematiky objevují tendence vyvozovat abstraktní pojmy ze zkušenosti žáka, ukázat užitečnost matematického modelu každodenní reality. Má srovnávací geometrie jako metoda, jako způsob myšlení, něco společného s každodenní realitou? Mojí odpovědí je rozhodné ano! V Maďarsku nedávné minulosti a současnosti události jasně ukázaly, jak postrádáme tradici a techniky konstruktivní diskuse a schopnost dívat se na lidi s odlišným názorem jako na partnery při hledání pravdy a ne jako na nepřátele.

Podobné problémy jsou přítomny všude tam, kde se objevují odlišná přesvědčení, odlišné víry či kultury. Matematika obecně a srovnávací geometrie zvláště mohou být účinným nástrojem výchovy další generace v duchu tolerance, demokracie a vzájemného porozumění. V tomto smyslu splňuje srovnávací geometrie naléhavé a současné potřeby každodenního života a z tohoto důvodu si více než zaslouží být součástí „realistické matematiky“!

Vyjmenoval jsem mnohé klady i zápory svého projektu. Prosím své české kolegy, aby jej vyzkoušeli! Mohu jim v tom být podle svých skromných možností ochotně nápomocen – a stejně rád se od nich něčemu přiučím!

Literatura

[1] Hejný, M., *Aj geometria naučila človeka myslieť*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1990.

[2] Henderson, D. W., *Experiencing Geometry in Euclidean, Spherical and Hyperbolic Spaces*, Pearson Education, Prentice Hall, 2001.

[3] Lénárt, I., *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere*, Key Curriculum Press, Berkeley, California, 1996. (Maďarská mutace: Nemeuklideszi kalandok a rajzgömbön. Múzsák, 1999.)

[4] Mammana, C. et al., *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century - An ICMI Study*, Educational Studies in Mathematics 28, Kluwer Academic Publishers, 91–98, 1995.

István Lénárt
Matematika Tanszék
Tanító-és óvóképzö föiskolai kar, Eötvös Loránd tudományegyetem
Kiss János. u. 40., H–1126 Budapešť, Maďarsko
e-mail: ilenart@cs.elte.hu

Článek napsaný pro časopis Učitel matematiky z angličtiny přeložila a upravila Naďa Stehlíková. Článek byl se souhlasem autora mírně upraven Milanem Hejným, aby lépe odpovídal zvyklostem v našem časopise.