Učitel matematiky

Jana Příhonská

Teorie grafů na základní škole (1)

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 1, 9–19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150745

TEORIE GRAFŮ NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE (1)

Jana Příhonská

Psychologové a fyziologové uvádějí, že většina informací (cca 80%) je vnímána zrakem. Proto je nasnadě věnovat prezentaci informací náležitou pozornost. K této prezentaci lze s výhodou využít grafů. Využít lze kartézských součinů v podobě tabulek či kartézských grafů v kartézském souřadnicovém systému.

S pojmem graf se v matematice i v každodenním životě setkáváme poměrně často v různých významech. Asi nejběžněji je toto označení spojeno s funkční závislostí, např. jedná-li se o spotřebu elektrické energie v závislosti na časovém období či o vzdálenost ujetou v závislosti na čase apod. Jiný význam je spojen se statistickým zpracováním souborů, kdy využíváme různé druhy diagramů (sloupcový, spojnicový, kruhový). V našem případě se budeme zabývat především tzv. uzlovými grafy a diagramy, čímž jsou míněna schémata uzlů (bodů) a hran (čar) v souladu s (ne)orientovaností hran. U neorientovaných grafů nás zajímá pouze fakt spojení uzlů, u orientovaných grafů pak i směřování hran, které mají obvykle podobu šipek vedoucích z výchozího do koncového uzlu. Zaměříme se i na tzv. h-diagramy, které jsou spjaty se jménem matematičky *Maria Hasse*, dcery světově známého matematika *Helmuta Hasseho* (1898–1979).

Teorie grafů není součástí standardních osnov základní školy, nicméně některé myšlenky této teorie bývají užívány při řešení různých problémů, třeba k vizualizaci, systematizaci nebo procesualizaci jisté slovně nebo geometricky popsané situace. Jak dále uvidíme, grafy se vyskytují v různých matematických úvahách, kdy dovolují přehledně znázornit zdánlivě velice obtížnou a těžce řešitelnou úlohu. V popředí našeho zájmu je mimo jiné zkvalitnění schopnosti pracovat s kódovanými znakovými systémy, propojování různých oblastí matematiky základní školy a v souvislosti s tím rozvoj řešitelských strategií žáků [Pří]. Znalost, resp. pochopení významu matematického pojmu může žák projevit činností či popsat podobností daných situací. Korespondenci vzájemně odpovídajících struktur nazýváme *izomorfismem* (nebo jen *morfismem*). V této souvislosti zavádíme nový pojem *grafové kódování*, který nenajdeme v žádné dostupné literatuře. Vystihuje však dostatečně náš záměr o využití morfismů při řešení úloh. Konkrétně se jedná o zavedení uzlů a hran odpovídajícího grafu a přeformulování daného problému.

V příspěvku předkládáme ukázky úloh, které ilustrují možné využití grafů a umožňují zavádět základní pojmy z teorie grafů již na základní škole. Začneme pracovat s bludišti. K jejich zkoumání se jeví jako nejvhodnější matematická disciplína právě teorie grafů.

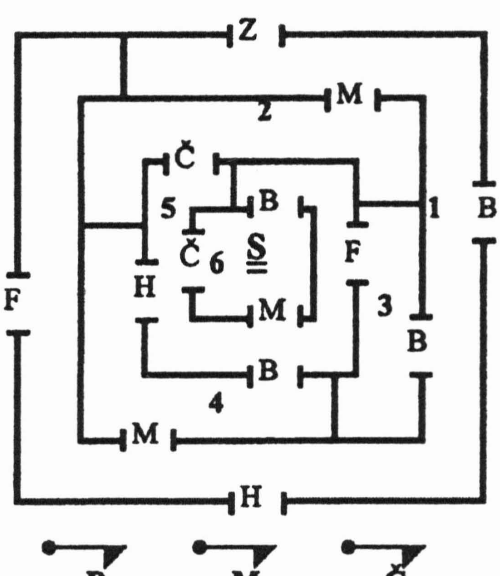
Každé bludiště se dá znázornit jako graf. Graf je zadán množinou uzlů a množinou hran. V bludišti, kdybychom je chtěli zakreslit jako graf, přiřadíme uzly grafu všem křižovatkám, všem koncům slepých uliček, vchodům, východům a případně také nepřístupným místům, uzavřeným komnatům apod. Hrany odpovídajícího grafu přiřadíme všem chodbám nebo cestičkám v bludišti, které musí spojovat dvojice uzlů, dvě křižovatky nebo křižovatku a konec slepé cesty apod. Z grafu můžeme snadněji vidět, jaké vlastnosti dané bludiště má. Je to dáno tím, že dlouhé a spletité cestičky v bludišti jsou na grafu představovány krátkými hranami. Celek je podstatně „průhlednější". Původní podoba bludiště se sice ztrácí, ale graf naopak dává lepší informace o těch otázkách, které nás u bludiště zajímají: *Je cíl bloudění vůbec dosažitelný? Pokud k němu vede více cest, která z nich je nejkratší? Kterým částem bludiště je lépe se vyhnout? Obsahuje bludiště slepé cesty? Které to jsou? Jak a kde je musíme minout? Obsahuje bludiště nedosažitelné části (ostrovy)? Jak musíme postupovat na jednotlivých křižovatkách, abychom se k cíli dostali co nejrychleji?*

V literatuře najdeme velké množství úloh s názvem *bludiště*. Bludiště lze klasifikovat [Ve]:

- *skutečná bludiště* (Čechy: Kroměříž – park Květná zahrada, Praha na Petříně – zrcadlové bludiště; Británie: Hampton

Court – stěny bludiště jsou ze stříhaných křovin);

- *obrázková bludiště*, bývají oproti skutečným rozsáhlejší, lze v nich realizovat prvky nedosažitelné ve skutečných bludištích. Jde v podstatě o kreslená bludiště;
- *barevná bludiště*, s „turistickými“ cestami, pravidla vymezují roli barev. Použití barevných bran v daném bludišti uvádí Hejný [He];
- *počítačová bludiště* souvisejí s programy, které přímo vytvářejí bludiště – nejde o počítačové pronásledování v místnostech a chodbách velké budovy.



Obr. 1: Bludiště barevných bran

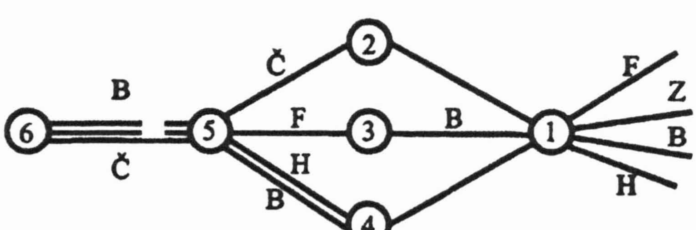
V následujícím textu vyjdeme z barevných bludišť, speciálně z tzv. *bludišť barevných bran* [He], která se jeví jako jedny z nejpřijatelnějších při přechodu na grafové zpracování a počáteční práci s grafy. Používání barev je nová vlastnost bludišť. Vždy je nutné stanovit pravidlo, jímž je nutno se řídit při bloudění daným bludištěm. Upřesněme, co tím rozumíme, na následujícím příkladu.

Bludiště má 6 nádvoří (při postupu z vně do středu bludištěm barevných bran. Na obrázku 1 je takové bludiště zakresleno: bludiště jimi rozumíme zdmi ohraničené prostory – očíslované 1 – 6): vnitřní nádvoří označíme jako **S**(třed) bludiště.

V každé zdi jsou barevné brány – brány, které se dají odemknout pouze klíčem stejné barvy: v našem označení se jedná o brány **Z**elenou, **M**odrou, **F**ialovou, **H**nědou, **B**ílou a **Č**ervenou. Celkem je zde 14 bran. Máme k dispozici tři klíče určité barvy (uvedené pod daným bludištěm), které smíme použít v zadaném pořadí a musíme se dostat z vně do středu bludiště (v našem případě procházíme v pořadí bílá, modrá a červená brána).

Řešení: Bílou branou B přejdeme na první nádvoří. Prvním nádvořím projdeme k severní modré bráně zdi, otevřeme ji klíčem M a projdeme do druhého nádvoří. Na druhém nádvoří dojdeme k červené bráně, otevřeme ji klíčem Č a vstoupíme do pátého nádvoří. Pátým nádvořím dojdeme až k bílé bráně, kterou otevřeme bílým klíčem a vstoupíme do středu bludiště. Tím je úloha vyřešena.

Obrázek 2 ukazuje, jak je možné bludiště z obr. 1 překreslit pomocí grafu. Jednotlivým nádvořím přiřadíme shodně očíslované uzly příslušného grafu. Barevné brány odpovídají shodně označeným hranám grafu.



Obr. 2: Graf bludiště z obr. 1

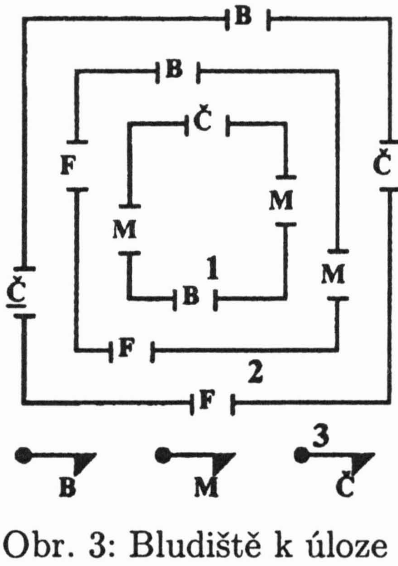
Soubor úloh typu „bludiště barevných bran“ s řešením

Zadání pro všechny úlohy jsou stejná: dostat se do středu bludiště při použití zadaných barevných klíčů v daném pořadí.

Při řešení všech úloh je využito grafů. Výhoda grafového zpracování je zřejmá zejména u složitějších bludišť a u náročnějších úkolů, např. při hledání celkového počtu cest, které vedou do středu bludiště. Jednotlivá nádvoří odpovídají uzlům, spojovací dveře hranám v příslušném grafu. Nádvoří číslujeme od středu (uvedeno přímo v daném bludišti). Pro odlišení bran, které mají stejnou barvu a spojují stejná nádvoří, užíváme dolního indexu k označení severní, jižní, východní a západní brány. Zjednodušená a přehledná forma grafu je vždy uvedena na vedlejším schématu.

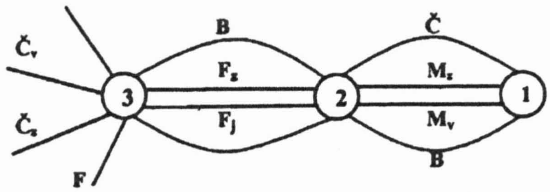
Úloha B1

Úkol: Projděte bludištěm z vnějšku do středu bludiště tak, že otevíráte brány v pořadí barevných klíčů, tj. projděte nejprve bílou branou (použijeme bílý klíč), pak modrou branou (použijeme modrý klíč) a nakonec červenou branou (použijeme červený klíč), postup můžeme opakovat.

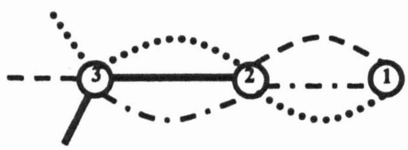


Obr. 3: Bludiště k úloze B1

Řešení: Z obrázku 4 je zřejmé, že bludištěm se dá projít bez zjevných komplikací. V tabulce pod obrázkem 4 jsou uvedeny použité



Obr. 4a: Graf bludiště z obrázku 3



Obr. 4b: Zjednodušený graf bludiště z obrázku 3

Bílá	Červená	Modrá	Fialová

typy čar, které odpovídají jednotlivým barvám.

Dílčí úkoly:

1. Použijte nyní klíče v pořadí B – F – M. Zkoumejte počet všech možných cest do středu bludiště v libovolném pořadí daných klíčů. Řešení zapište.

Řešení: Všechna možná pořadí daných klíčů jsou následující:

B – F – M   F – M – B   M – F – B
B – M – F   F – B – M   M – B – F

Vyloučit můžeme možnosti začínající M, končící F. Jsou tedy tři možnosti: B – M, F – M – B, F – B – M. Bereme-li v úvahu existenci stejně barevných dveří na různých stranách, pak počet možností vzroste:

B – F – M: 4 možnosti
F – B – M: 2 možnosti
F – M – B: 1 možnost

2. Jak změníte bludiště, abyste se do středu:

a) dostali naprosto vždy (při libovolných barvách klíčů)

b) nedostali nikdy

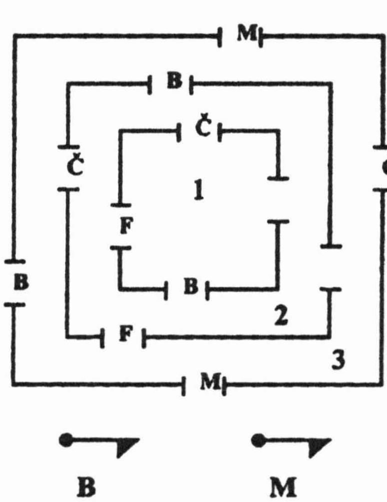
Řešení: a) Přiděláním dveří tak, aby z každé místnosti vedly dveře všech barev. b) Např. přiděláním neprůchodných dveří.

Úkol v následujících úlohách je společný: dostat se do středu bludiště, pokud použijeme zadané klíče v daném pořadí. Kteroukoli místnost je možno navštívit několikrát, nesmí se však vystoupit ven z bludiště. Proto nadále uvádíme pouze schéma bludiště a jeho grafickou podobu.

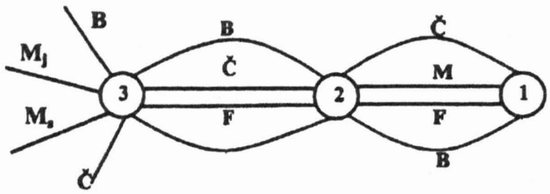
V tabulce jsou uvedeny odpovídající typy čar pro jednotlivé barvy – společné pro všechny uvedené úlohy.

....	- - - - - -	-·-·-·-·	—··—··—	━━━━━	— — —
Bílá	Červená	Modrá	Hnědá	Fialová	Zelená

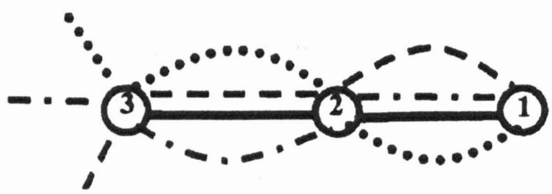
Úloha B2 — viz obr. 5



Obr. 5: Bludiště k úloze B2



Obr. 6a: Graf bludiště z obrázku 5



Obr. 6b: Zjednodušená forma grafu bludiště z obrázku 5

Dílčí úkol:

Kolik je možností, jak se dostat do středu bludiště, použijete-li zadané klíče?

Pokud neuvažujeme možnost zbytečného návratu na předchozí nádvoří, existuje jediná možnost, jak se dostat do středu bludiště.

Úloha B3 — viz obr. 7

Řešení: Do bludiště je možné vstoupit z uzlu označeného jako „0“. Trasa postupu je evidentní z daného grafu.

Dílčí úkoly:

1. Ztratíte bílý klíč. Máte jen zbylé dva (M, F), které musíte střídat. Dostanete se do středu bludiště?

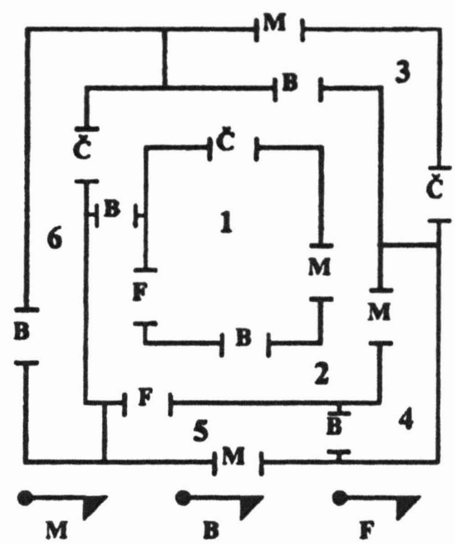
Do středu bludiště se dostaneme po následující trase: **0 – m – 5 – f – 2 – m – 1.**

2. Zvolte tři různě barevné klíče tak, abyste se dostali do středu bludiště. Kolik je možností pro různá pořadí jejich použití?

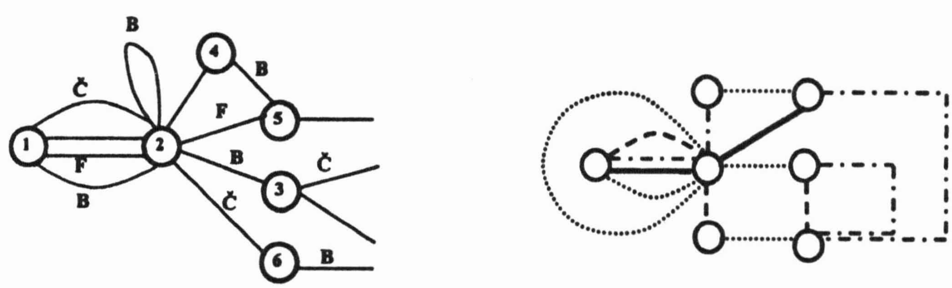
Tento úkol nabízí několik řešení dle příslušné volby.

3. Které dva klíče by stačily, abyste se dostali do středu bludiště?

Např. M – F, M – B, Č – B (B – Č). Celkový počet různých cest se dá určit opět z grafu. Za cestu považujeme i tu, která vede přes



Obr. 7: Bludiště k úloze B3



Obr. 8: Graf k bludišti z obrázku 7 a jeho zjednodušená forma

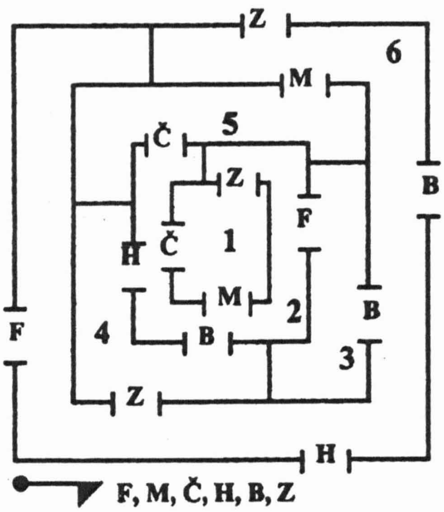
smyčku, tj. např. **0 – b – 6 – č – 2 – b – 2 – č – 1**, či trasu, kdy vycházíme při bloudění ven z bludiště a opět se do něho vracíme, např. **0 – b – 6 – č – 2 – b – 3 – č – 0 – b – 6 – č – 2 – b – 1.**

Úloha B4 — viz obr. 9

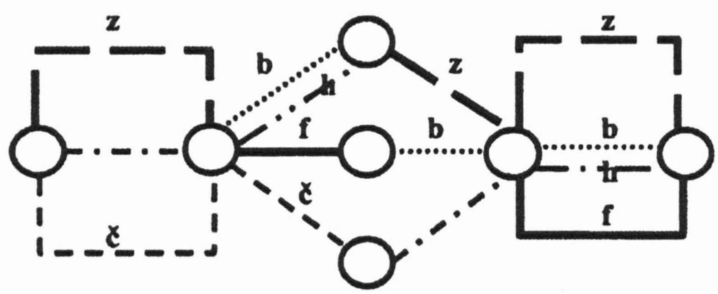
Řešení: Na obrázku 10 vidíme příslušný graf.

Dílčí úkoly:

1. Změnilo by se řešení v předchozím případě, jestliže byste měli k dispozici univerzální klíč, kterým se dá odemknout kterákoli



Obr. 9: Bludiště k úloze B4



Obr. 10: Graf bludiště z obrázku 9

brána? Pokud ano, napište jak, pokud ne, zdůvodněte svoji odpověď.

Počet možných tras, vedoucích do středu bludiště, se mnohonásobně zvětší.

2. Jaký klíč můžete ztratit, abyste se při použití zbylých klíčů v daném pořadí dostali do středu bludiště?

Ztratit nelze žádný klíč.

3. Při jakém pořadí klíčů F, M, Č, H, B, Z se určitě nikdy nedostanete do středu bludiště?

Stačí si všimnout barev, které se nemohou vyskytovat následně za sebou. Jsou to např. kombinace začínající F – Č, M – Č, F –

Z – Č, F – B – Č, M – H (resp. Č, B, Z, F) a další.

4. Změňte pořadí daných klíčů (F, M, Č, H, B, Z). Uměli byste určit počet všech různých možností pořadí klíčů? Pokuste se o to.

Počet všech možných pořadí je dán počtem permutací ze šesti prvků, tj. $P(6) = 6! = 720$ možností.

Literatura

[He] Hejný, M., *Barevná bludiště – nepublikováno*, PedF UK, Praha, 1998.

[He] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.*, SPN Bratislava, 1990.

[Př] Příhonská, J., *Teorie grafů v učivu základní školy.*, In: Sborník Mezinárodní věd. konf. „Matematika v príprave učiteľov 1.st. ZŠ“, Univerzita Mateja Bela Banská Bystrica, 2001, s. 40–46.

[Pří] Příhonská, J., *Řešitelské strategie s využitím teorie grafů v učivu základní školy.*, In: Sborník Mezinárodní věd. konf. „Matematika v přípravě učitelů primární školy.“ Univerzita Palackého v Olomouci, 2002, s. 149–153.

RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
TUL v Liberci
Hálkova 6, 461 17 Liberec
e-mail: jana.prihonska@vslib.cz