István Lénárt

Projekt „srovnávací geometrie" (rovina - sféra - hemisféra) [1]

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 1, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150742

PROJEKT „SROVNÁVACÍ GEOMETRIE“ (ROVINA – SFÉRA – HEMISFÉRA)

István Lénárt

Článek seznamuje čtenáře s autorovým projektem výuky geometrie založené na srovnávání geometrie roviny, geometrie sféry[1] a modelu hyperbolické geometrie.

1. Popis projektu

Svět geometrických pojmů a vztahů je žákům otevírán v konstruktivistickém duchu pomocí úloh. K jejich řešení používá žák především rýsovací nástroje, v případě potřeby i počítačovou techniku. Úlohy jsou jak z prostředí eukleidovské geometrie, tak z geometrie sféry a někdy i z hyperbolické geometrie modelované na hemisféře.

Projekt nepředpokládá žádné předchozí znalosti geometrie sféry, pouze běžné životní zkušenosti, které má s tvarem koule již žák základní školy. Od učitele se očekávají znalosti tradiční středoškolské geometrie a znalosti souřadnic na glóbusu.

V první etapě výuky převažují úlohy o eukleidovské rovině provázené paralelními úlohami na sféře. Až později, u žáků čtrnáctiletých, se začnou objevovat úlohy o hemisféře.

Při porovnávání planimetrie a sférické geometrie je z pedagogického hlediska patrně nejdůležitějším momentem určitá změna myšlení, překročení jisté hranice, okamžik rozpoznání hranic zažitého způsobu nazírání a oprávněnosti existence více způsobů uvažování. Hyperbolická geometrie rozšiřuje a doplňuje poznatky a zkušenosti z prvých dvou typů geometrií. Proč jsme si mezi modely hyperbolické geometrie zvolili místo otevřeného kruhu nebo

[1] Místo „plocha kulová“ používáme stručnější z řečtiny převzatý termín „sféra“ a místo „polovina plochy kulové“ používáme „hemisféra“.

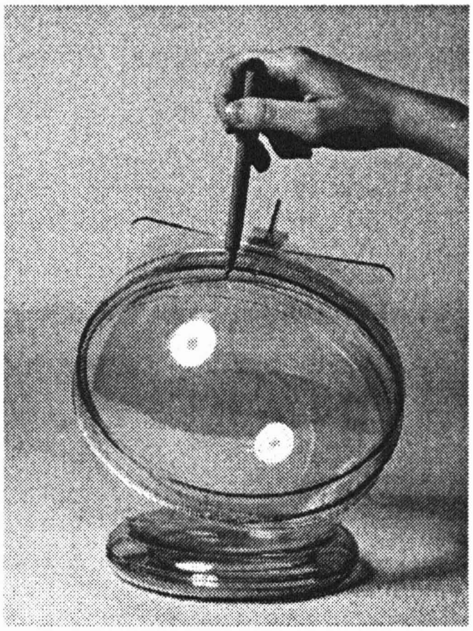
otevřené poloroviny právě model polokoule? Model polokoule velmi názorně demonstruje pojmy jako hyperbolická přímka, kruh, měření úhlů atd. Navíc při práci s modelem polokoule lze výborně využít zkušenosti ze sférické geometrie. Je známo, že u většiny studentů se zkušenosti z planimetrie omezují na eukleidovskou geometrii. Naproti tomu polokoule, právě pro svou odlišnost od roviny, je k představení nového geometrického systému vhodnější, než kdybychom museli již zažité planimetrické pojmy a modely znovu definovat v rámci jiného systému axiomů. Kromě toho hraje sférická geometrie důležitou úlohu nejen v matematice, ale i v geografii, astronomii, fyzice, v technických vědách, v různých odvětvích umění, ve stavitelství a architektuře, v designu atd.

Cílem projektu je, aby

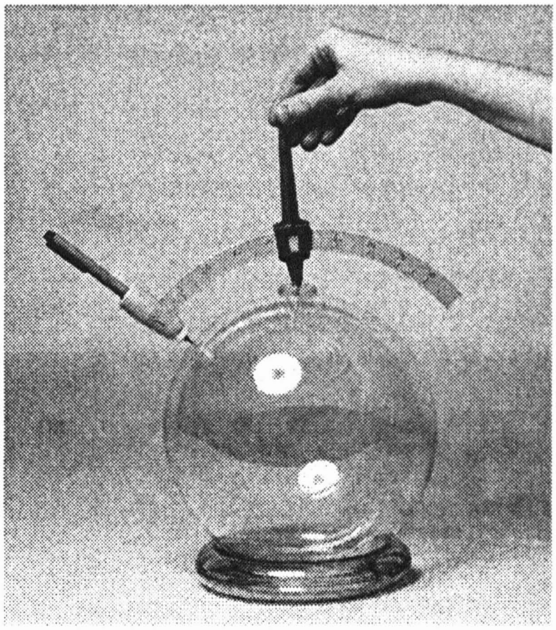
- přinesl studentům radost, naučil je milovat geometrii a myšlení,
- studenti lépe pochopili eukleidovskou planimetrii cestou protipříkladů a odhalování hranic platnosti jednotlivých poznatků,
- vedl studenty k samostatnému objevování systemizace vědní disciplíny, která slouží jako východisko pro moderní matematiku a pro četné přírodní i společenské vědy; aby v nich probudil touhu po hledání a nalezení podstaty,
- učil studenty propojovat manipulační aktivity a využití výpočetní techniky,
- rozvíjel prostorové vidění,
- přiblížil studentům základy hyperbolické geometrie tak důležité v moderní fyzice a jiných vědách a rozptýlil mystický „opar“, v němž je toto téma zahaleno,
- pěstoval toleranci vůči jinému pohledu a odlišnému způsobu uvažování, rozvíjel komunikační schopnosti a schopnost kultivované diskuse.

Projekt využívá výukové pomůcky s názvem Lénárt Sphere. Žáci kreslí a měří na povrchu průhledné koule, která je velká asi jako fotbalový míč, nebo na hemisférické fólii, tzv. náčrtníku, který se dá upevnit na kouli. Na kouli lze zkonstruovat hlavní kružnice pomocí sférického měřítko-úhloměru (viz obr. 1) a sférické kružnice libovolného poloměru pomocí sférického kružítka (viz obr. 2). Navíc lze pomocí obalu „Živá planeta“ kouli změnit na globus, na který se dá kreslit.

V následujícím oddíle budeme ilustrovat některé partie projektu „Srovnávací geometrie“.



Obr. 1



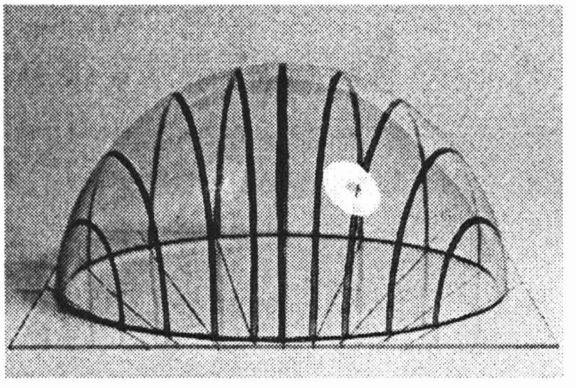
Obr. 2

2. Porovnání některých geometrických objektů ve třech geometriích

Geometrii eukleidovské roviny E čtenář zná. Sférická geometrie S (geometrie na povrchu koule), která ještě před šedesáti lety patřila k vrcholným partiím gymnaziální matematiky, se dnes učí jen v některých vysokoškolských specializacích. Nicméně životní zkušenosti s koulí máme všichni a ty nám ke sledování dalšího textu postačí. Nejnáročnější bude geometrie hyperbolická H, kterou budeme zkoumat na hemisférickém modelu. Sféru rozdělíme rovníkem na dvě hemisféry, severní a jižní. Všechny body severní hemisféry, bez rovníku, budeme považovat za body hyperbolické roviny H.

Přímky a svazek přímek

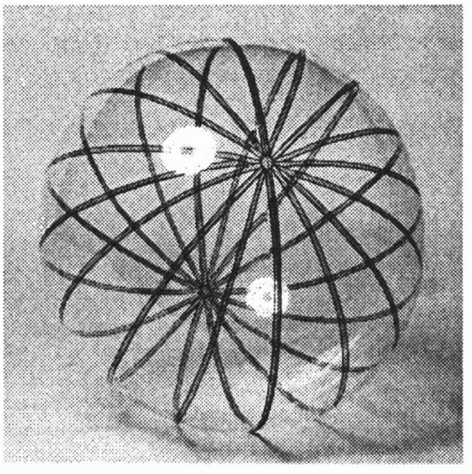
Přímku v eukleidovské rovině E známe. Na sféře S bude roli přímky hrát každá hlavní kružnice, tedy řez sféry rovinou procházející středem sféry. „Přímkou“ na hemisféře H budeme rozumět každou polokružnici, která je řezem hemisféry a roviny kolmé na rovinu rovníku (viz obr. 3). Slovo „přímka“ budeme v dalším textu používat ve třech různých kontextech. V E je „přímkou“ obyčejná přímka, na sféře S je „přímkou“ hlavní kružnice, na hemisféře H je „přímkou“ polokružnice kolmá na rovník. Tam, kde hrozí nedorozumění, upřesníme v jakém kontextu slovo „přímka“ používáme.



Obr. 3

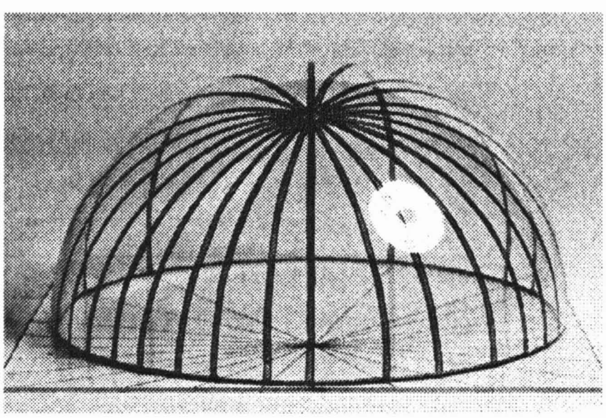
Svazkem přímek v eukleidovské rovině E nazýváme množinu všech přímek roviny, které procházejí jedním, pevně zvoleným bodem. V tomto článku budeme svazkem přímek v E nazývat i množinu všech přímek roviny E, které jsou rovnoběžné s jednou, pevně zvolenou přímkou.

Svazkem přímek (hlavních kružnic) na sféře S nazýváme množinu všech řezů sféry rovinami procházejícími jedním pevně zvoleným bodem sféry (viz obr. 4). Dodejme, že v rovině E existují dva druhy svazků (procházející bodem a rovnoběžné s přímkou), ale na sféře S existuje jen jeden druh svazku.

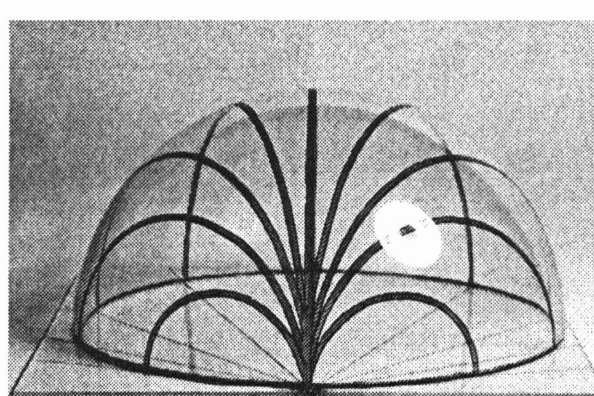


Obr. 4

Na hemisféře H existují čtyři druhy svazků přímek. První tři popíšeme pomocí přímky kolmé na rovinu rovníku. Nechť tedy p je jakákoli přímka kolmá na rovinu rovníku hemisféry. Množina všech řezů hemisféry rovinami procházejícími touto přímkou vytvoří svazek přímek (polokružnic) na H. Podle toho, zda průsečík přímky p s rovinou rovníku leží a) uvnitř, b) na, c) vně kružnice rovníku, budeme daný svazek přímek nazývat svazkem prvního (viz obr. 5), druhého (viz obr. 6), nebo třetího (viz obr. 3) druhu. Svazek přímek čtvrtého druhu tvoří všechny polokružnice, které jsou řezy hemisféry rovinami rovnoběžnými s jednou, pevně danou rovinou kolmou na rovinu rovníku. Nadále budeme svazek čtvrtého druhu považovat za svazek třetího druhu.



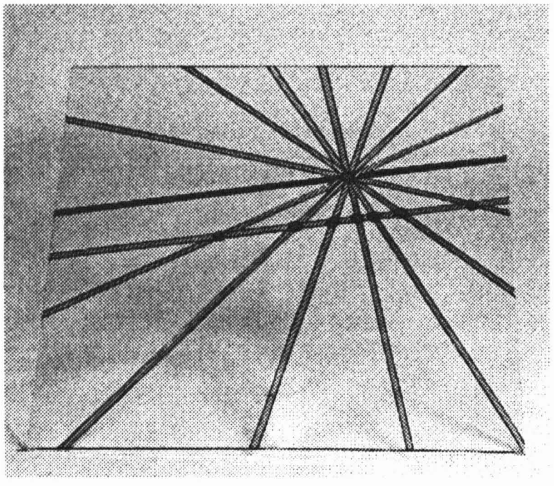
Obr. 5



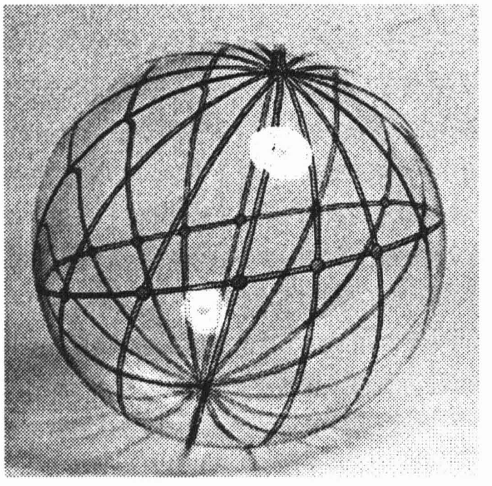
Obr. 6

Neprotínající se přímky, rovnoběžnost

Situace v E je znázorněna na obr. 7. Zde vidíme svazek protínajících se přímek a další přímku mimo tento svazek. Otázka zní, kolik přímek najdeme ve svazku, které neprotínají přímku ležící vně svazku? Existuje právě jedna přímka tohoto typu a nazýváme ji rovnoběžka (na obrázku je nakreslena tmavší barvou). Všechny ostatní přímky svazku danou přímku protínají.



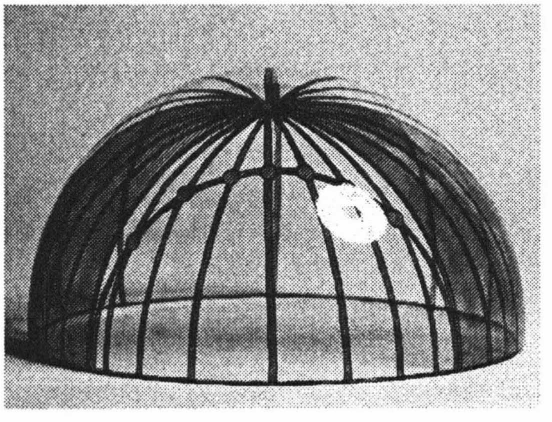
Obr. 7



Obr. 8

Svazky přímek na sféře S se chovají jinak, protože všechny přímky ve svazku protínají danou přímku mimo tento svazek, jak je ukázáno na obr. 8. Takže na kouli neexistují žádné rovnoběžné přímky.

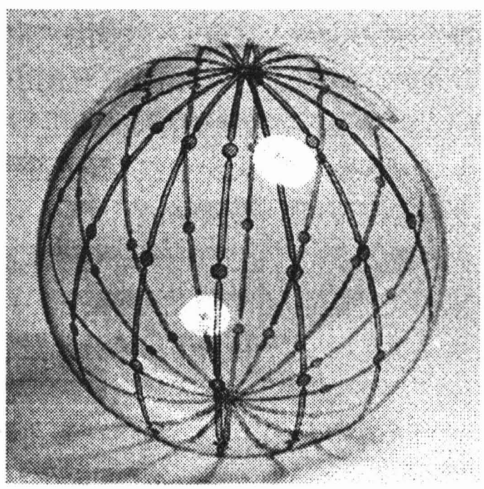
Jak to vypadá na hemisféře H? Všechny přímky ve svazku, které jsou ve světlé oblasti na obr. 9, protínají přímku vně svazku. Ovšem všechny přímky ve svazku, které jsou v tmavší oblasti nebo na jejím okraji, tuto přímku neprotnou. V této geometrii existuje nekonečně mnoho neprotínajících se přímek!



Obr. 9

Vzdálenost

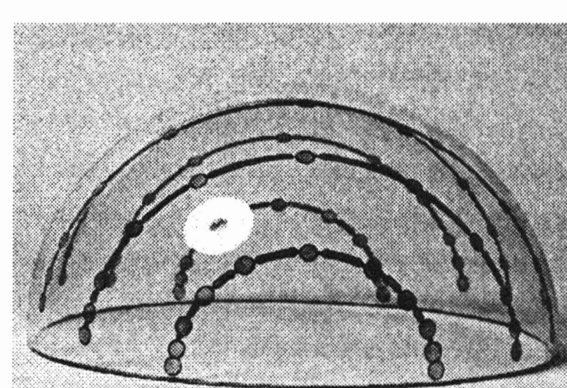
V rovině E umíme porovnat délku jakýchkoli dvou úseček. Chceme-li měřit, musíme zavést jednotku – jednu úsečku prohlásíme za jednotkovou. Na sféře S je délka hlavní kružnice dána vztahem $l = 2\pi r$. Tedy zde má každá přímka konečnou délku.



Obr. 10

Úsečkou na sféře je oblouk hlavní kružnice a jeho délka je dána poměrem k délce přímky. Například délka úsečky, jejíž jeden koncový bod je pól a druhý leží na rovníku, je $\pi r/2$. Na obr. 10 vidíme 16 úseček s póly jako společnými koncovými body. Každá z těchto úseček je „tečkami“ dělena na 6 shodných dílů délky $\pi r/6$.

Na hemisféře H je situace výrazně odlišná. Zatímco u předešlých dvou případů, v geometriích E a S, bylo možné pojem vzdálenosti opřít o životní zkušenost, u geometrie H nám zkušenost nepomůže. Zde každá přímka je polokružnicí, jejíž koncové body leží na rovníku (který do H nepatří). Jestliže teď bude obyvatel světa H kráčet po přímce směrem k rovníku krokem konstantní délky, bude se nám jeho chůze jevit jako zpomalující se – každý jeho následující krok se nám bude jevit kratší předcházejícího (viz obr. 11). Čím blíže bude k rovníku, tím kratší se nám bude zdát jeho krok. K rovníku nikdy nedojde. Na hemisféře H, stejně jako v rovině E, má každá přímka nekonečnou délku.

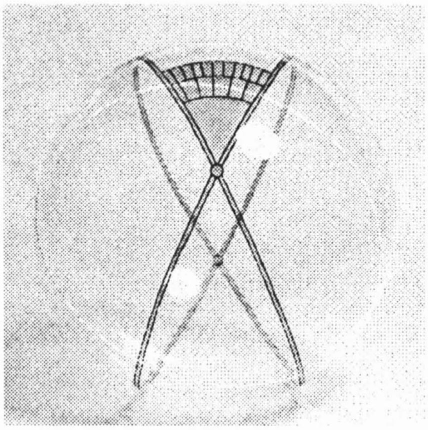


Obr. 11

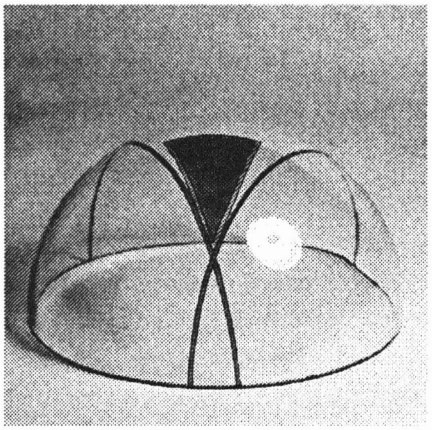
Velikost úhlu dvou přímek

V E měříme úhly úhloměrem. Míra úhlu dvou přímek v E je číslo z intervalu $\langle 0°, 90° \rangle$. Rovnoběžné přímky „tvoří" úhel 0°.

Na S nebo H jsou přímky reprezentovány kružnicemi. Úhel dvou takových přímek měříme tak, že „normálním" eukleidovským úhloměrem změříme úhel tečen k těmto kružnicím v jejich průsečíku. Tedy zde nás naše intuice neklame, úhly vidíme takové, jaké jsou v těchto geometriích (viz obr. 12 a 13). O úhlu neprotínajících se přímek v geometrii H mluvit nebudeme.



Obr. 12



Obr. 13

Dokončení v příštím čísle

István Lénárt
Matematika Tanszék
Tanító-és óvóképzö föiskolai kar, Eötvös Loránd tudományegyetem
Kiss János. u. 40., H–1126 Budapešť, Maďarsko
e-mail: ilenart@cs.elte.hu

Článek byl napsán pro časopis Učitel matematiky. Z angličtiny přeložila a upravila Naďa Stehlíková. Článek byl se souhlasem autora mírně upraven Milanem Hejným, aby lépe odpovídal zvyklostem v našem časopise.