# VYUŽITÍ POČÍTAČŮ PŘI VÝUCE MATEMATIKY (VÝUKOVÝ PROGRAM KAPITOLY FUNKCE)

LENKA VOLFOVÁ

Jsem čtvrtým rokem učitelkou na obchodní akademii a vyšší odborné škole ekonomické. Na učitelskou praxi jsem se těšila jako asi každý začínající učitel. S nadšením jsem připravovala hodiny a zjišťovala v zápětí, že ze spousty nachystaných příkladů stihnu v hodině slabou třetinu. Snad se to jednou změní, ale zatím se cítím jako Achilles běžící za želvou. Tedy já neustále klopýtám za učebními plány. Přede mnou sedí pět docela nadšených žáčků a pět jiných, kdykoli ochotných zeptat se: „A na co mi to bude v praxi?“ Při procvičování nerovnic s absolutní hodnotou se odpověď nehledá snadno. V patnácti letech téměř nezabírá argument, který ovšem neochvějně používám, že prohlubujeme abstraktní a logické myšlení.

Proto jsem se rozhodla ozvláštnit hodiny matematiky a vymyslet něco, co by pomohlo i těm méně nadaným najít k matematice vztah a naučit se s příklady hrát.

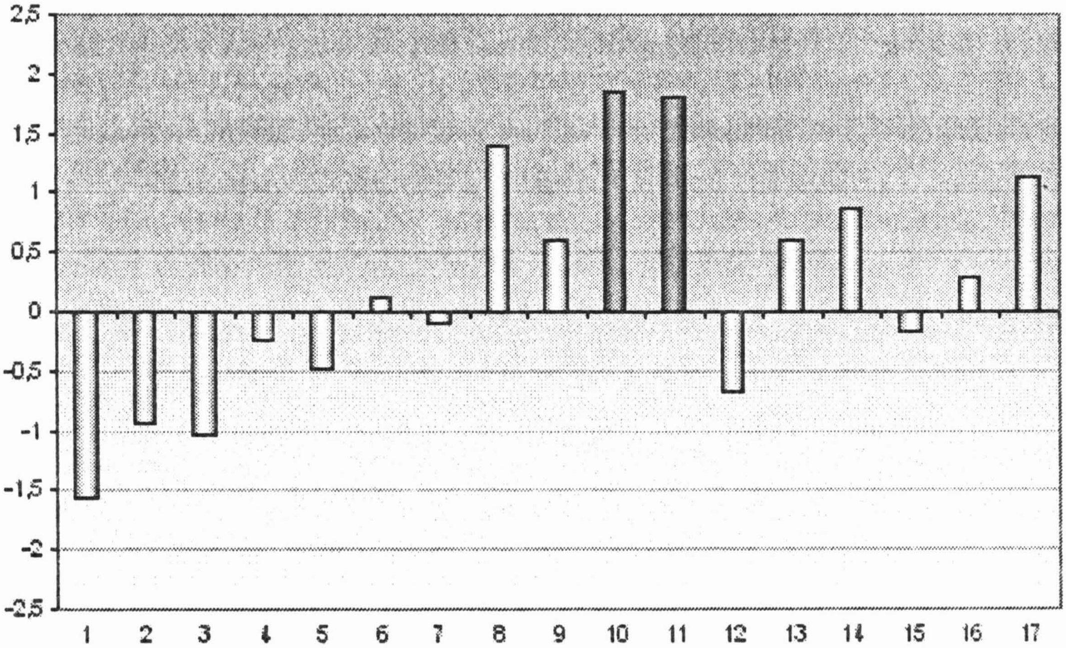
Asi nejobtížnějším tématem jsou pro studenty funkce, zároveň jsou však vděčnou oblastí pro můj záměr – graf je vlastně obrázek, každý si může představit předmět pohybující se po nějaké trajektorii.

## Průzkum

Než vás seznámím s programem, který se pokouším vytvořit, podpořím svou snahu malým dotazníkem, který jsem rozdala před poslední lekcí přípravného kurzu na přijímací zkoušky. (Jde o sobotní dopolední kurzy, kde se opakují témata objevující se v testových úlohách přijímacích zkoušek na VŠ, během šesti lekcí po pěti hodinách si budoucí maturanti zopakují téměř celou středoškolskou látku a zároveň si propojí jednotlivé oblasti matematiky.)

Studenti dostali seznam sedmnácti opakovaných témat vyskytujících se u přijímacích zkoušek a u každého měli zvolit jedno ze sedmi políček s hodnotící škálou: 1. = velmi snadné, 4. = ani příliš lehké, ani těžké, 7. = příliš náročné. Nakonec měli za úkol výslovně uvést nejnáročnější a nejjednodušší téma.

Stupnici jsem pak ohodnotila body od $-3$ po $+3$ a uvedení tématu jako nejnáročnějšího (resp. nejjednoduššího) body $+1$ (resp. $-1$). Každému tématu jsem přiřadila bodový součet. Protože někteří studenti zapomněli odpovědět (10 studentů neohodnotilo poslední téma, 1 sedmé a 1 deváté), spočítala jsem průměr bodů na respondenta, tedy maximálně 4, minimálně $-4$ body. Respondentů bylo celkem 43. Výsledky jsou shrnuty v grafu:




1 = úprava algebraických výrazů
2 = mocniny a odmocniny
3 = lineární rovnice a nerovnice
4 = kvadratické rovnice, kvadratické rovnice s parametrem
5 = kvadratické nerovnice
6 = výrazy, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou
7 = nerovnice a soustavy nerovnic
8 = logaritmus, logaritmické rovnice a nerovnice
9 = exponenciální rovnice a nerovnice
10 = funkce, jejich vlastnosti a grafy
11 = goniometrické rovnice a nerovnice
12 = slovní úlohy, procenta
13 = planimetrie, stereometrie
14 = kombinatorika
15 = komplexní čísla
16 = posloupnosti
17 = analytická geometrie v rovině

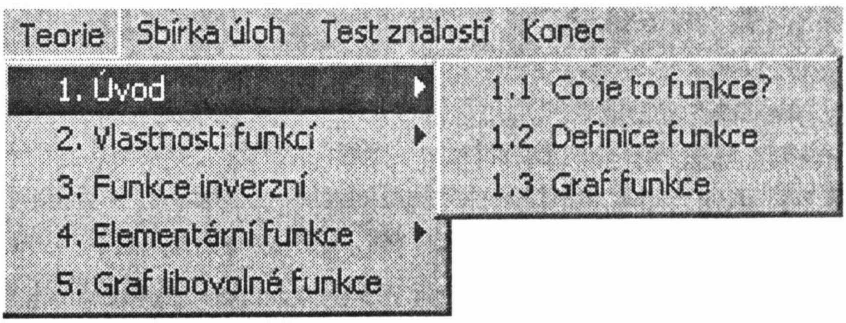
Vidíme, že nejnáročnějším tématem se zdají studentům skutečně funkce a s nimi úzce související goniometrie. Ze všech 43 respondentů jen 8 nepřiřadilo funkcím ani goniometrii své maximální obodování.

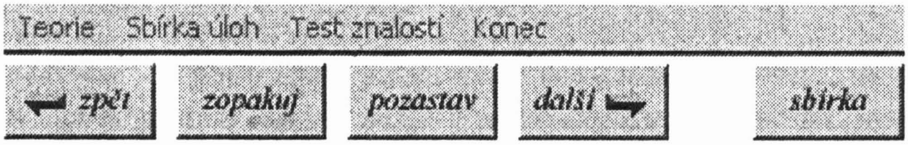
## Program Funkce

Úkolem vytvářeného programu je zjednodušit učiteli život a studentům ukázat v lepším světle nezaslouženě neoblíbenou oblast matematiky. Matematické programy, které existují, jako např. Derive, Mathematica, MathCad, jsou samozřejmě výborné a určitě by mohly být využity pro práci s nadanými žáky, ale studenti, kteří funkcím nerozumí, budou mít strach se učit kromě funkcí jako takových ještě práci s aplikací. Hlavně ale nemáme k dispozici tolik hodin, abychom se mohli věnovat seznámení studentů s poměrně složitou aplikací.

Proto jsem se pokusila zaměřit na méně nadané žáky a ráda bych jim přiblížila funkce včetně teorie v jakési digitální učebnici plné řešených příkladů. Tato učebnice má tři části – „Teorii", „Sbírku úloh" a závěrečný „Test znalostí".

Předpokládám, že učebnici využívá student jak ve škole s učitelem, tak doma při samostudiu, proto může libovolně procházet kapitolami, a to jak pomocí obsahu (v programu hlavní menu), tak pomocí tlačítek v horní části okna. Student si může procházet buď teoretickou část nebo naopak řešit postupně cvičení ze sbírky. Obě hlavní části (tj. teorie a sbírka) jsou navzájem provázány – student si může zobrazit teoretickou kapitolu a pomocí tlačítka „sbírka" se ocitne v příslušné kapitole sbírky příkladů. Naopak při řešení úloh ze sbírky si může tlačítkem „teorie" vyvolat příslušnou teoretickou kapitolu.

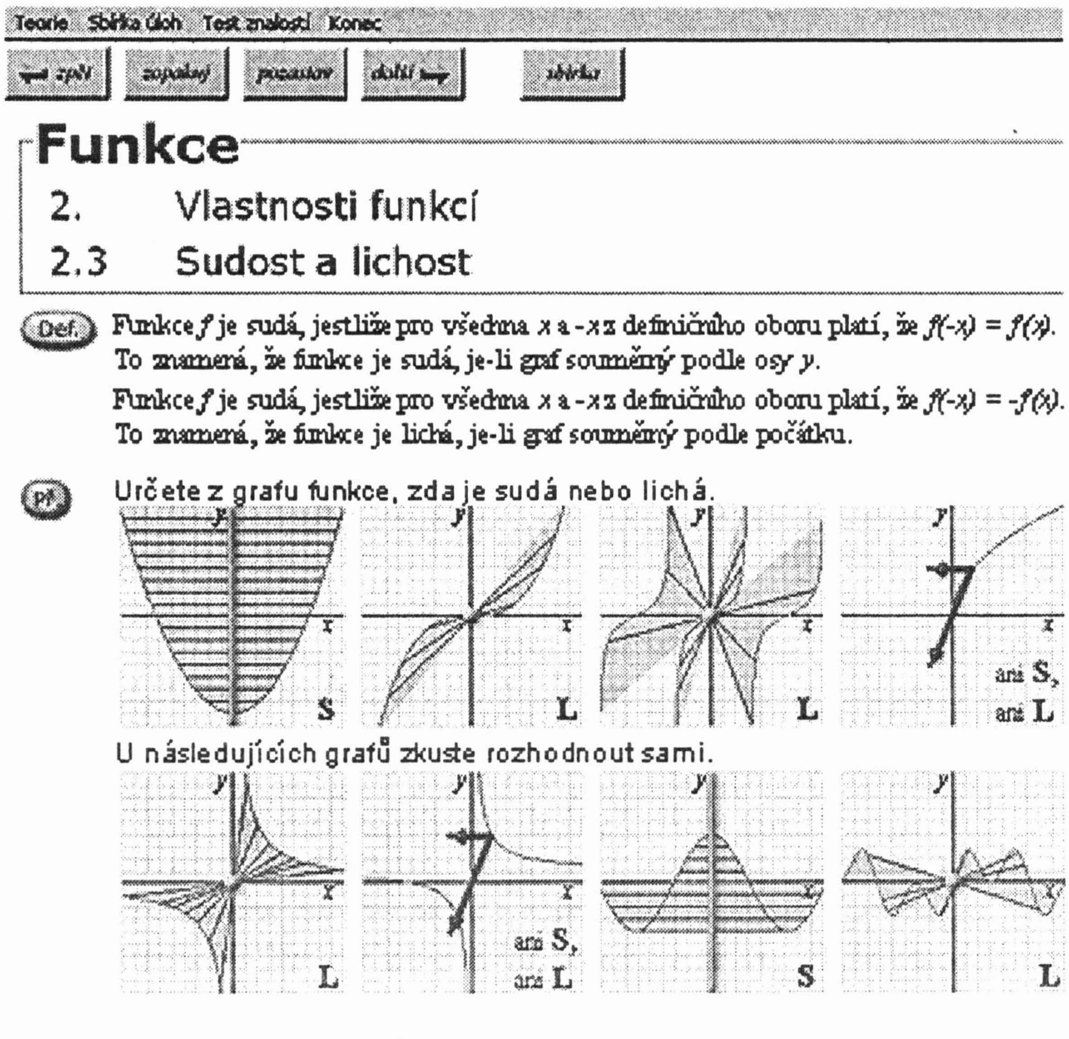




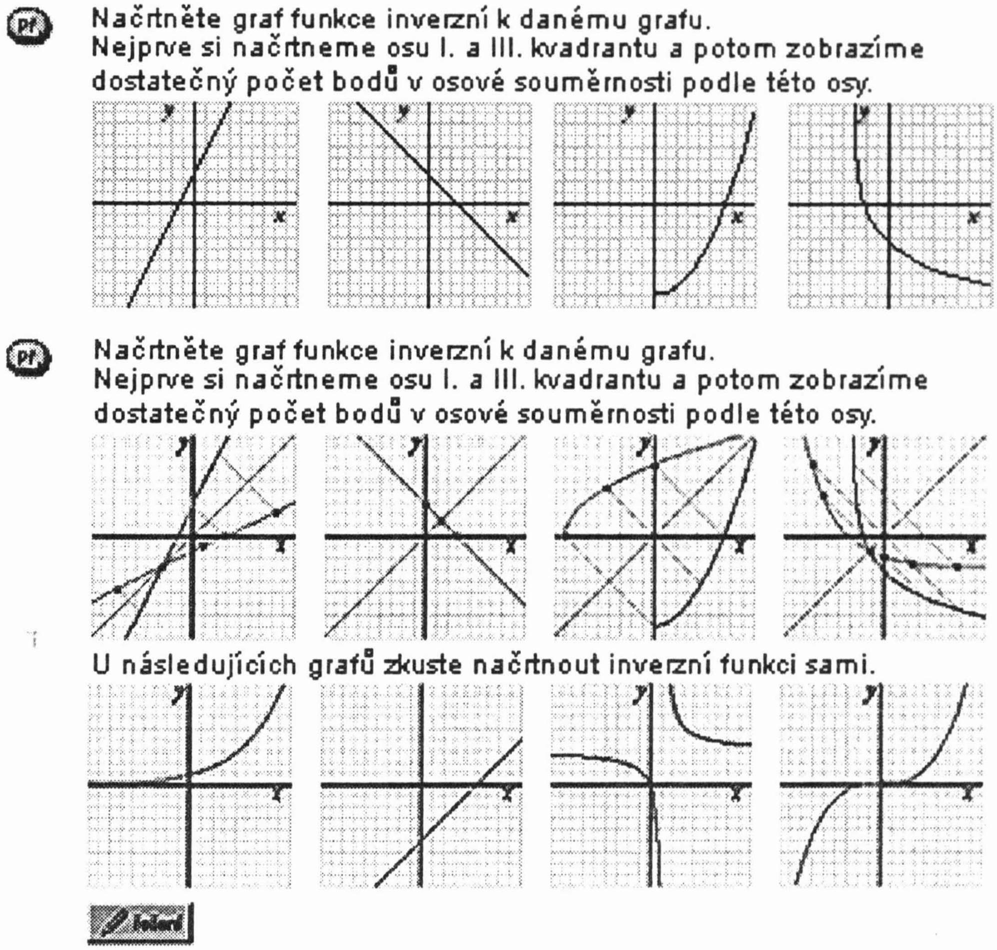

Každé učivo se objevuje postupně, aby student nebyl zahlcen spoustou textu. Cílem není podrobně mu vysvětlit danou látku (na to má skutečnou tištěnou učebnici, která se jistě čte lépe), ale využít možností počítačového zpracování pro postupné odhalování grafického řešení příkladů nebo interaktivní kreslení grafů.

## Teorie

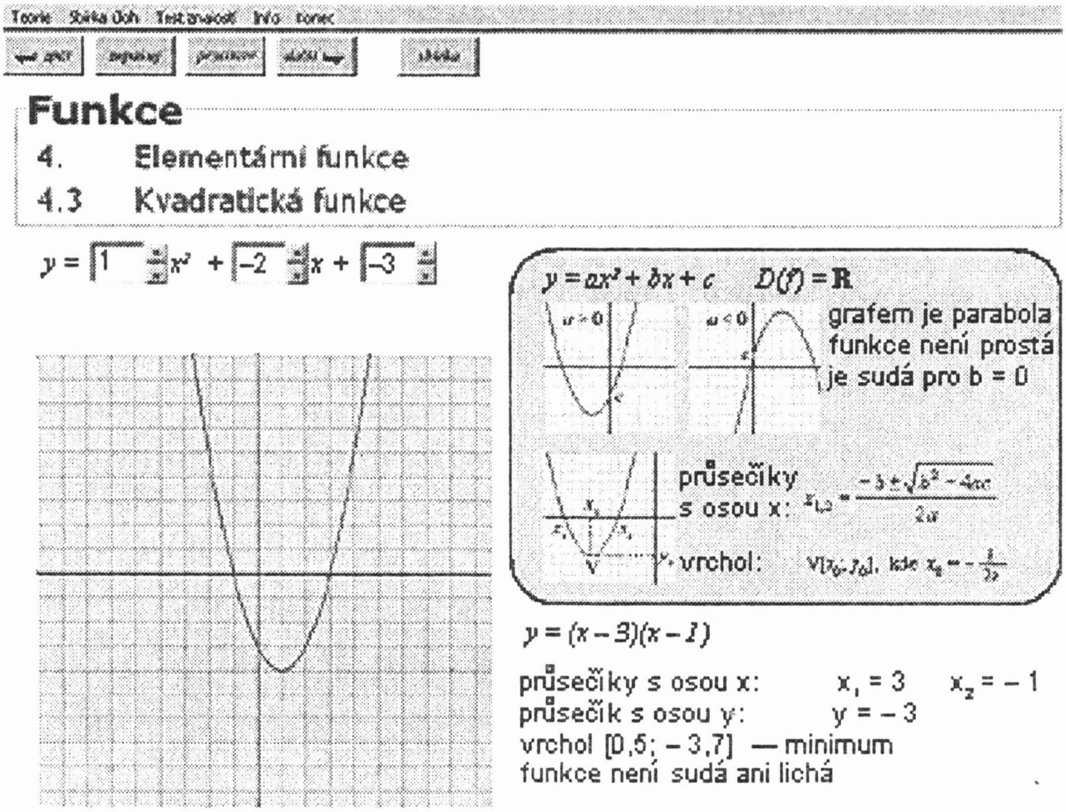
Kapitoly o obecných vlastnostech funkcí mají stejnou strukturu. Nejprve se objeví definice dané vlastnosti a hned je tato definice aplikována v řešeném příkladu na grafy funkcí:



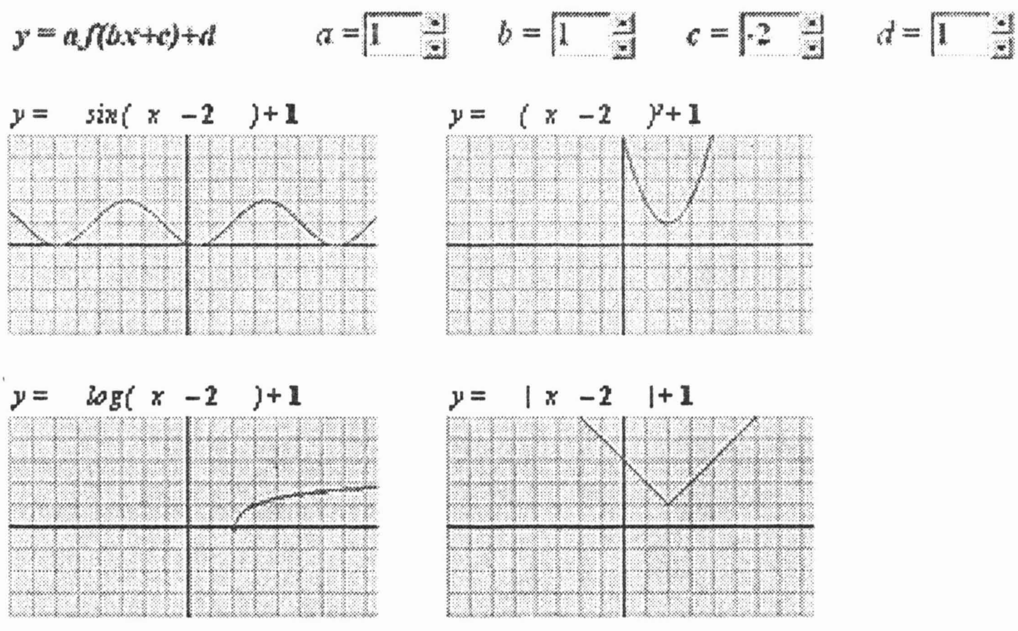
U řešeného příkladu je vždy zobrazeno zadání příkladu a několik grafů. V zápětí je stručně slovně objasněno, jak se bude při řešení postupovat. Nakonec se graficky odhalí řešení u všech grafů. Pak se studentu zobrazí stejný počet jiných grafů a tlačítko „řešení“ a student se může pokusit příklad dořešit sám a odpověď si hned ověřit:




Největším přínosem však pro studenty budou, alespoň doufám, kapitoly týkající se konkrétních elementárních funkcí. Tady jsem mohla uplatnit to, co zkrátka učitel na tabuli nemůže zvládnout, a to je interaktivní kreslení grafů. V těchto kapitolách se studentovi nejprve postupně objeví teorie (aby ji musel pročíst) a pak má k dispozici graf, u kterého může jednoduše šipkami měnit hodnotu parametrů a graf se okamžitě překresluje, navíc se hned objevují některé základní vlastnosti nebo body funkce (např. průsečíky s osami):



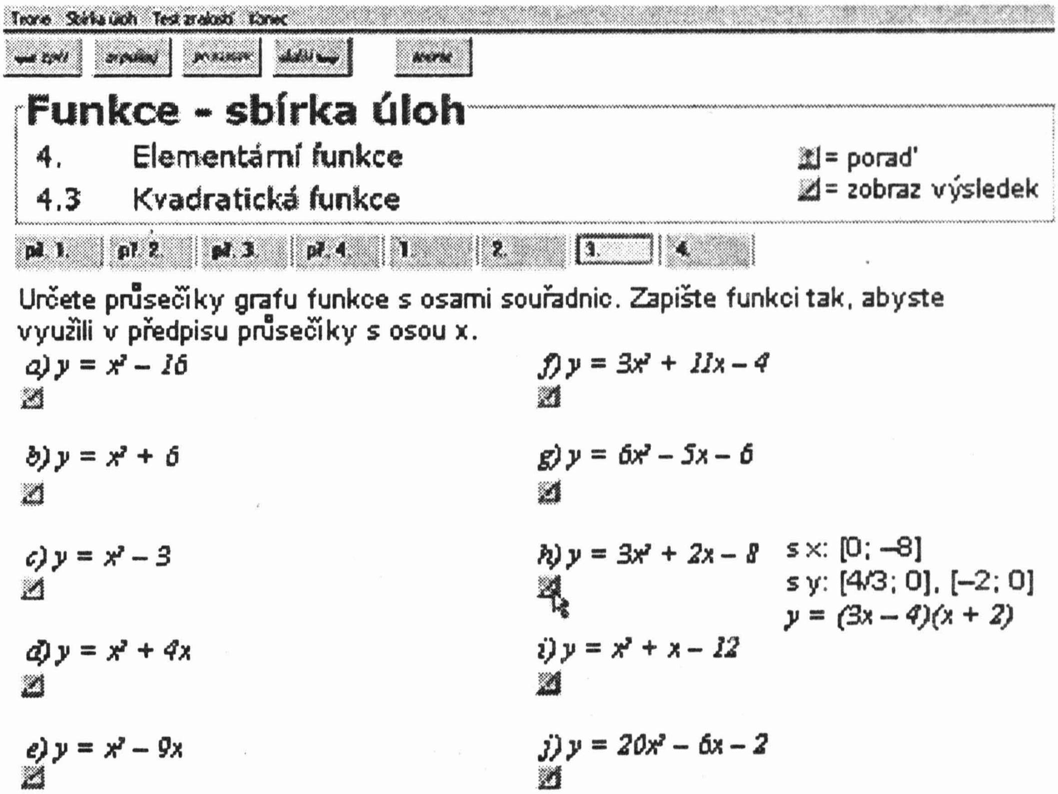

Zajímavá snad bude i kapitola o vlivu parametrů na graf funkce, kde jsou zároveň grafy několika funkcí a student vidí, že při změně parametrů funkce „reagují“ obdobně:



## Sbírka úloh

Sbírka úloh navazuje na každou teoretickou kapitolu a doplňuje ji o typické příklady vztahující se k ní.

Např. v kapitole „3.2 Kvadratická funkce“ se student dozví základní vlastnosti této funkce, výpočet vrcholu, vliv parametrů na graf funkce apod., ve sbírce příkladů si pak ověří, zda se seznámil s touto funkcí dostatečně důkladně – má za úkol např. načrtnout graf, určit definiční obor a obor hodnot, vlastnosti, vrchol, průsečíky s osami souřadnic apod. Pod každým zadáním se skrývá 10 úloh a) – j), kliknutím na pastelku se objeví výsledek:




Každé úloze předchází řešený příklad se stejným značením, tj. „př. 3.“ odpovídá zadáním úloze „3.“. Řešený příklad si student může také nejprve zkusit vyřešit sám. Když si neví rady, klikne na otazník a objeví se částečné vyřešení úlohy nebo rada, jak postupovat. Dokud je otazník přístupný, může stále „radit“. Pastelka opět znamená konečný výsledek – v tomto případě jakýsi závěr.

př. 1. | př. 2. | př. 3. | př. 4. | 1. | 2. | 3. | 4.

Určete průsečíky grafu funkce s osami souřadnic. Zapište funkci tak, abyste využili v předpisu průsečíky s osou x.

a) $y = x^2 + x - 6$

př. 1. | př. 2. | př. 3. | př. 4. | 1. | 2. | 3. | 4.

Určete průsečíky grafu funkce s osami souřadnic. Zapište funkci tak, abyste využili v předpisu průsečíky s osou x.

Průsečík s osou x má y-onovou souřadnici rovnu nule. Vyřešíme rovnici pro y = 0. Analogicky určíme průsečík s osou x. Zapíšeme rovnici ve tvaru $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

a) $y = x^2 + x - 6$

př. 1. | př. 2. | př. 3. | př. 4. | 1. | 2. | 3. | 4.

Určete průsečíky grafu funkce s osami souřadnic. Zapište funkci tak, abyste využili v předpisu průsečíky s osou x.

Průsečík s osou x má y-onovou souřadnici rovnu nule. Vyřešíme rovnici pro y = 0. Analogicky určíme průsečík s osou x. Zapíšeme rovnici ve tvaru $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

a) $y = x^2 + x - 6$ Jak víme, průsečíkem s osou y je parametr c.
Průsečík s osou x vypočítáme z rovnice
$0 = x^2 + x - 6$

př. 1. | př. 2. | př. 3. | př. 4. | 1. | 2. | 3. | 4.

Určete průsečíky grafu funkce s osami souřadnic. Zapište funkci tak, abyste využili v předpisu průsečíky s osou x.

Průsečík s osou x má y-onovou souřadnici rovnu nule. Vyřešíme rovnici pro y = 0. Analogicky určíme průsečík s osou x. Zapíšeme rovnici ve tvaru $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

a) $y = x^2 + x - 6$ Jak víme, průsečíkem s osou y je parametr c.
Průsečík s osou x vypočítáme z rovnice
$0 = x^2 + x - 6$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$$

př. 1. | př. 2. | př. 3. | př. 4. | 1. | 2. | 3. | 4.

Určete průsečíky grafu funkce s osami souřadnic. Zapište funkci tak, abyste využili v předpisu průsečíky s osou x.

Průsečík s osou x má y-onovou souřadnici rovnu nule. Vyřešíme rovnici pro y = 0. Analogicky určíme průsečík s osou x. Zapíšeme rovnici ve tvaru $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

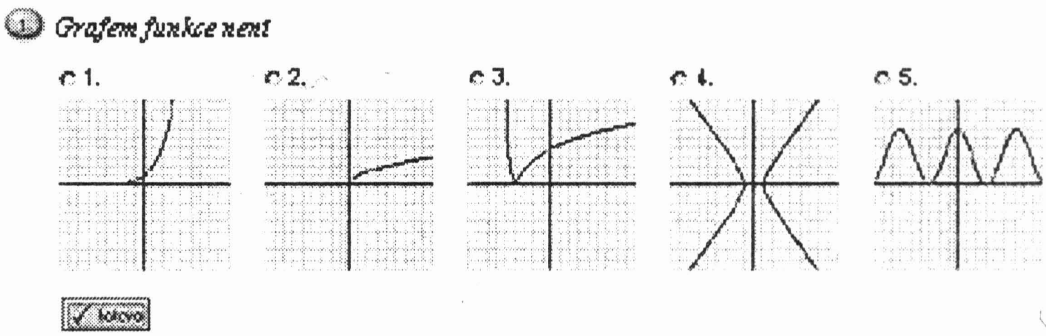
a) $y = x^2 + x - 6$ Jak víme, průsečíkem s osou y je parametr c.
Průsečík s osou x vypočítáme z rovnice
$0 = x^2 + x - 6$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$$

Průsečík s osou y:
$[0; -6]$
Průsečíky s osou x:
$[2; 0]$, $[-3; 0]$
$y = (x-2)(x+3)$

## Test znalostí

Test znalostí je zaměřen na obvyklé testovací úlohy zadávané u přijímacích zkoušek na vysoké školy. Žák dostane postupně deset testových úloh a pět možností, po každé odpovědi se dozví správnou variantu, jeho celková úspěšnost je nakonec vyhodnocena. Úlohy jsou vybírány náhodně z textového souboru, nabízené možnosti jsou také zobrazovány v náhodném pořadí. Při stisknutí tlačítka „zopakuj" se proto tvoří zcela nový test a student může testovat své znalosti téměř libovolně dlouho. Textový soubor navíc učitel může doplňovat o svá vlastní zadání.




Na závěr bych se chtěla omluvit za kvalitu reprodukovaných obrázků. Zdá-li se vám v nepoměru velikost písma ke grafu, je to manuálním zvětšením textu. Monitor se opravdu velmi těžko zmenšuje na stránku A5, proto jsem většinu textů v obrázcích musela upravit do čitelné podoby.

*Lenka Volfová*
*Obchodní akademie T. Bati a VOŠE Zlín*
*náměstí T.G.Masaryka 3669*
*760 01 Zlín*
*e-mail: l.volfova@oazlin.cz*