Učitel matematiky

Martina Janáčková

Prečo sú niektoré kombinatorické úlohy ťažké? (1)

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 3, 153–162

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150731

PREČO SÚ NIEKTORÉ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY ŤAŽKÉ? (1)

MARTINA JANÁČKOVÁ

1. ÚVOD

Žiaci stredných škôl sa na hodinách matematiky stretávajú s viacerými metódami riešenia kombinatorických úloh. Najjednoduchšou z nich je systematické vypísanie všetkých možností. Žiaci ju často používajú, nakoľko nevyžaduje osvojenie a aplikáciu žiadnych nových vedomostí (vzorcov, poučiek, atď.). V rámci širšieho pedagogického výskumu sme sa zamerali práve na úlohy, ktoré bolo možné takto riešiť a ktoré boli naviac po matematickej stránke identické. Napriek tomu sa žiacke riešenia týchto úloh odlišovali počtom nájdených možností a v niektorých prípadoch aj použitou metódou.

Ak cieľom učiteľa je zvýšiť úspešnosť žiakov pri riešení kombinatorických úloh, musí najskôr pochopiť, v čom spočíva ich obtiažnosť. Na základe našich pozorovaní sa domnievame, že táto bude závisieť aj od iných než matematických faktorov. Aby sme v tomto článku aspoň čiastočne prispeli k objasneniu uvedenej problematiky, snažili sme sa na vybraných úlohách prostredníctvom analýzy žiackych riešení zodpovedať otázku položenú v nadpise.

Ak predpokladáme, že riešenie úlohy je ovplyvňované viacerými parametrami, je nutné pri zisťovaní vplyvu jedného z nich zachovať všetky ostatné parametre konštantné. Aby sme teda mohli zistiť, čo vplýva na náročnosť úloh, porovnáme žiacke riešenia tzv. *izomorfných úloh* resp. *izomorf. Siegler* tento pojem v [22, s. 395] definuje takto: „*Izomorfy sú problémy, ktoré sú formálne identické, ale rozdielne v ich povrchových štruktúrach.*“ V našom prípade, matematická izomorfia spočíva v priradení všetkých testových úloh k jednému zo základných typov kombinatorických úloh

($P'_{2,3}(5)$). Žiaci stredných škôl sa s izomorfnými úlohami stretávajú bežne pri klasickom vyučovaní kombinatoriky, keď sú nútení priradiť každú úlohu k jednému zo základných typov kombinatorických úloh.

2. TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ

Problémom izomorfie sa zaoberali už viacerí. *Törner* zistil, že je pre žiakov ťažké spoznať podobnosť v štruktúre úloh: „*Príklady ukazujú, že matematická izomorfia leží hlbšie ako povrchná syntaktická*“ [28, s. 120]. Priťažujúce podľa *Hefendehl-Hebeker* a *Törnera* je, že „syntaktická izomorfia zadaní kombinatorických úloh v žiadnom prípade neimplikuje matematickú izomorfiu“ [10, s. 257–258]. Aj základom syntakticky izomorfných úloh môže byť rôzna matematická štruktúra. *Reed*, *Ackinclose* a *Voss* [21, s. 94] vypozorovali, že keď si žiaci mohli vybrať ako pomôcku k riešeniu analogickú úlohu, väčšinou si nezvolili izomorfnú, ale povrchovo podobnú.

Bauersfeld uvádza v [1] možné príčiny ťažkostí pri rozpoznávaní podobnosti štruktúry úloh a objasňuje ich pomocou svojej teórie *subjektívnych skúsenostných oblastí* (Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche, skrátene SEB). SEB zahŕňa subjektívne dôležité skúsenosti, pocity, telesné zážitky,... Z dôvodu rozčlenenia všetkých skúseností do oblastí je možné, že dva problémy, ktoré sú síce štrukturálne rovnaké, ale obracajú sa na dve rôzne SEB, budú riešené celkom rozdielne: „*ako má byť medzi dvomi odlúčenými skúsenostnými oblasťami – bez nejakej sprostredkujúcej tretej! – utvorené plodné, na štrukturálnej identite založené spojenie, keď sú k dispozícii len prvky oboch SEB*“. Porovnanie štruktúr, ktoré je pre riešenie izomorfných problémov nutné, sa predsa len môže uskutočniť, ak je k dispozícii SEB zariadená na funkciu porovnávania, prípadne sa môže spontánne založiť. Ak sa toto založenie nepodarí, nie je pre žiaka možné bez problémov spoznať štrukturálnu zhodu medzi dvomi alebo viacerými SEB. *English* [9, s. 35] tvrdí: „*Predovšetkým, deti požadujú veľa príležitostí k skúmaniu problémových štruktúr, k identifikácii príbuzných štruktúr a k vybudovaniu znalostí a odhadu kedy, prečo* *a ako usudzovať analogicky pri riešení a predstavovaní problémov.*" Aj nedostatočný priestor k takémuto objavovaniu môže byť jednou z príčin ťažkostí pri odhaľovaní analógií medzi izomorfnými úlohami. Blokujúco vo vzťahu k izomorfným problémom pôsobí podľa *Hefendehl-Hebeker* a *Törnera* aj rozlišovanie medzi usporiadanými a neusporiadanými podmnožinami v rámci riešenia základných úloh [10, s. 258]. Vzniká falošný dojem, akoby usporiadané štruktúry nikdy nemohli byť izomorfné s neusporiadanými. Tento dojem vyvracia napr. známa skutočnosť, že výber k-prvkovej podmnožiny z n-prvkovej množiny zodpovedá poradiu $n - k$ núl a k jedničiek.

Ďalej uvádzame prehľad niektorých aspektov kontextu, ktorých vplyv na úspešnosť riešenia je už známy:

Caroll, Thomas a Malhotra [2, s. 151] zistili, že priestorovo formulované úlohy boli riešené lepšie a rýchlejšie, s menšími ťažkosťami s pochopením, než časovo formulované úlohy.

Clement [3, s. 409] vychádzal z toho, že veľmi silný vplyv na úspešné riešenie problému má nie len formulácia pravidiel, ale aj interpretácia sémantického kontextu. Došiel k záveru, že ak kontext zdôrazňuje adekvátnu reprezentáciu, rozdiely vo formuláciách pravidiel sa tým môžu vyrovnať.

Hejný v [12, s. 73] a [11, s. 472–473] ukázal, že na použité stratégie i úspešnosť riešenia vplýva to, či je úloha formulovaná konceptuálne[2] alebo procesuálne.[3]

Hesse [13] zadal dvom skupinám pokusných osôb problém so sémantickým kontextom a bez neho, pričom logická štruktúra týchto úloh bola rovnaká. Lepšie riešená bola jednoznačne úloha so sémantickým kontextom.

Kotovsky, Hayes a *Simon* [17, s. 286] mimo iné vyskúmali, že na rýchlosť pri riešení problému pozitívne vplývali také formulácie pravidiel, ktoré sa vzťahovali na poznatky o okolitom svete.

---

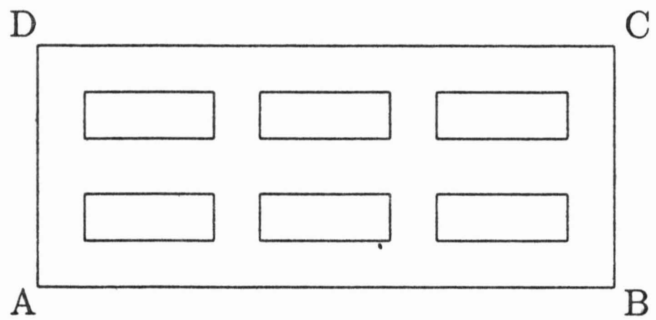
[2] Slovo konceptuálny označuje nadčasové obsahy, či stavy nášho vedomia.
[3] Adjektívum procesuálny označuje tie obsahy, aktivity či stavy vedomia, v ktorých rozhodujúcu rolu hrá čas.

3. NÁSTROJ A JEHO APLIKÁCIA

Ako východisko sme použili 4 izomorfné kombinatorické úlohy:

Úloha „Mesto“

Na obrázku sú obdĺžnikmi vyznačené domy. Medzi nimi sú ulice. Koľkými rôznymi cestami sa môžeme dostať z miesta A do miesta C, ak budeme chodiť ulicami mesta len smerom nahor a vpravo?



Žiackymi stratégiami riešenia úlohy tohto typu sa zaoberala už *Kratochvílová* v [18] a [19]. Predmetom nášho záujmu však nie je len identifikácia stratégií, ale to, čo vplýva na ich výber. Preto sme potrebovali zostaviť ďalšie úlohy, ktoré by boli s predchádzajúcou izomorfné. Inšpiráciu pre úlohy „Hokej“ a „Rad“ sme našli v diele *Jodasa* [16, s. 8–10], úlohu „Priehradky“ sme prevzali z učebnice kombinatoriky pre gymnázia od *Smidu* [23]:

Úloha „Hokej“

Hokejový zápas sa skončil 2:3. Koľkými spôsobmi sa mohlo vyvíjať skóre zápasu?

Úloha „Priehradky“

Napíšte všetky možnosti, ktorými sa dá rozdeliť 5 gúľ A, B, C, D, E do 2 priehradiek u,v tak, aby v priehradke u boli 2 a v priehradke v 3 gule.

Úloha „Rad“

Koľkými možnými spôsobmi možno usporiadať do radu 3○ a 2 □?

Každá možnosť, ktorá je časťou riešenia predchádzajúcich úloh, sa dá prepísať do poradia troch symbolov **0** a dvoch **1**, kde

symbol **0** označuje v úlohe	symbol **1** označuje v úlohe v úlohe
„Mesto“ úsek cesty „vpravo“	„Mesto“ úsek cesty „nahor“
„Hokej“ gól, ktorý dalo druhé mužstvo	„Hokej“ gól, ktorý dalo prvé mužstvo
„Priehradky“ výber gule do priehradky v	„Priehradky“ výber gule do priehradky u
„Rad“ ○	„Rad“ □

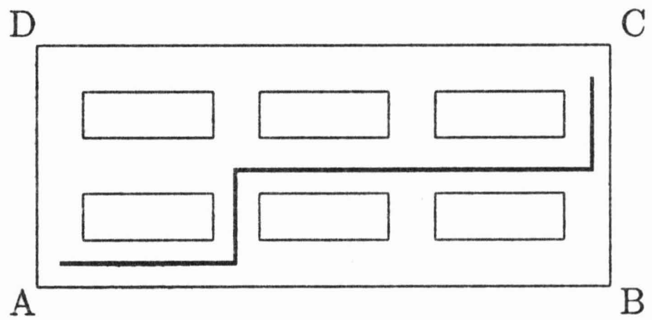
Každá z týchto úloh sa teda dá transformovať na známy typ úlohy $P'_{2,3}(5)$.

Ako dôležitý pojem sa pre vyjadrovanie v ďalšom texte ukázal pojem „pozícia“. Pod týmto pojmom budeme rozumieť v úlohe:

1. „Mesto“ poradové číslo úseku na ceste z A do C
2. „Hokej“ poradové číslo gólu
3. „Priehradky“ gule A, B, C, D, E (guľa A = 1. pozícia,...)
4. „Rad“ umiestnenie v rade

Pre ľahšie pochopenie uvádzame príklad:

V úlohe „Mesto“ sa dá každá cesta z miesta A do miesta C rozložiť na päť úsečiek dvoch typov: tri „vpravo“ a dve „nahor“. Táto skutočnosť umožňuje prepísať každú z ciest do poradia troch núl a dvoch jednotiek, kde symbol **0** označuje úsek „vpravo“ a symbol **1** úsek „nahor“. Na obrázku je vyznačená cesta **01001**.



pozícia	1.p.	2.p.	3.p.	4.p.	5.p.
cesta	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

Úlohy boli zadané šiestim žiakom 2 ročníka gymnázia (16 rokov). Riešenia boli natáčané videokamerou a následne spracované vo forme protokolov. Tieto sme následne podrobne analyzovali (kapitola 5). Takýto spôsob kvalitatívneho výskumu je v oblasti, ktorou sa zaoberáme, bežný (*English* [4]–[9]; *Hoffmann* [14]; *Martino* [20]; *Stein* [24]–[27]; ...).

4. PREHĽAD ŽIACKYCH RIEŠENÍ

Počty nájdených možností v riešeniach jednotlivých úloh šiestich žiakov znázorňuje tabuľka:

Meno žiaka	„Mesto“	„Hokej“	„Priehradky“	„Rad“
Jana	9	7	10	10
Martina	10	6	10	10
Michaela	10	4	10	10
Ivica	9	6	10	10
Dáša	10	6	10	10
Beba	9	6	10	9

5. ANALÝZA ŽIACKYCH RIEŠENÍ

Z tabuľky je zrejmé, že v počte nájdených možností je medzi jednotlivými úlohami veľký rozdiel. Kým úlohu „Priehradky“ vyriešili všetci žiaci správne, úlohu „Hokej“ majú všetci zle. Nakoľko sú úlohy matematicky izomorfné, tento výsledok je pozoruhodný. Zaujímalo nás, v čom môže spočívať príčina rozdielnej náročnosti.

5.1. Úlohy „Priehradky“ a „Rad“

V úlohách „Priehradky“ a „Rad“ boli až na jedno riešenie úlohy „Rad“ nájdené všetky možnosti. Tento priaznivý výsledok sa dá vysvetliť tým, že pre žiaka nebolo ťažké v oboch prípadoch rozpoznať príslušnosť k niektorému zo známych typov úloh (kombinácie, variácie, permutácie). Dokazuje to aj použitie metód používaných v škole – numerický výpočet alebo tzv. princíp tachometra. Princíp tachometra bol zavedený v práci L. D. English-ovej [6, s. 261]: „*This pattern is so named because of its similarity to a odometer in a vehicle.*“ V našej práci sme upravili popis tohto princípu tak, aby zodpovedal zadaniu našich úloh, pretože sa podmienkami líšia od úloh v spomínaných prácach. Jeden zo symbolov **1** sa zachováva na x-tej pozícii (tj. v úlohe „Rad" najčastejšie jeden zo □ na konkrétnom mieste, v úlohe „Priehradky" ide o výber jednej konkrétnej gule do priehradky u) (tzv. konštantný prvok), kým druhý postupne neobsadí všetky zvyšné pozície od najnižšej po najvyššiu bez toho, aby sa nejaká permutácia zopakovala (tj. v úlohe „Rad" druhý □ obsadzuje všetky zvyšné miesta, v úlohe „Priehradky" ide o výber zvyšných gulí do priehradky u). Po vyčerpaní všetkých možností sa vyberie nová – $(x+1)$. pozícia pre konštantný prvok a popísaný priebeh sa zopakuje. Stratégia končí vtedy, keď dôjde k vyčerpaniu všetkých možností pre výber pozície konštantného prvku. Správna aplikácia ktorejkoľvek zo spomínaných dvoch metód riešenia umožňuje dopracovať sa ku počtu všetkých možností. Ak sú však tieto metódy natoľko spoľahlivé a pre žiaka známe, vynára sa otázka, prečo ich žiaci nevyužili aj v úlohách „Mesto" a „Hokej"?

5.2. Úloha „Mesto"

Aby sme mohli aspoň čiastočne zodpovedať túto otázku, porovnajme najskôr Janine riešenia úloh „Mesto" a „Rad" (obr. 1). Z dôvodu neprehľadnosti písomného riešenia úlohy „Mesto" toto nahrádzame protokolom. Spolu s popismi jednotlivých činností žiačky počas riešenia uvádzame aj príslušné časové údaje (v sekundách). Na zápis ciest využívame spôsob kódovania objasnený už v predchádzajúcom texte:

<u>Úloha „Mesto"</u>

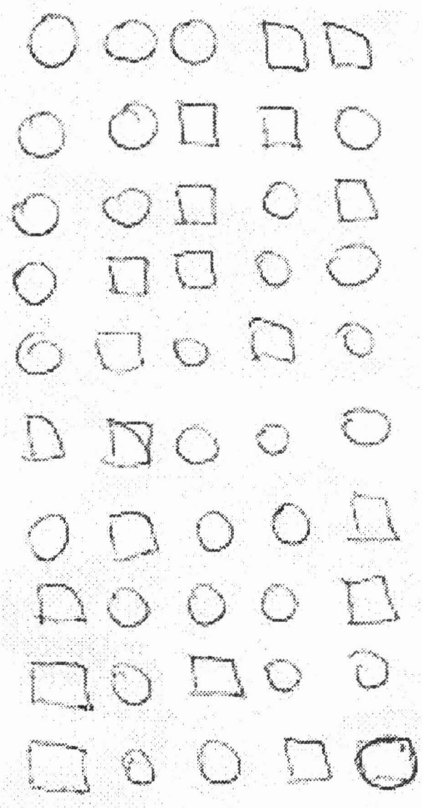
0.00	J. berie červenú pastelku a pozerá na obrázok.
0.02	J. vyznačuje cestu **00011** (1).
0.04	J. pozerá na obrázok.
0.06	J. vyznačuje rýchlo za sebou cesty **00110** (2), **00101** (3), **01010** (4).
0.12	J. pozerá na obrázok.
0.14	J. vyznačuje rýchlo za sebou cesty **01100** (5), **11000** (6), **10100** (7).
0.20	J. sa poškrabe vo vlasoch a pozerá na obrázok.
0.30	J. zdvihne pastelku do vzduchu a pozerá na obrázok.

0.46 J. naznačuje pastelkou vo vzduchu tesne nad obrázkom cesty **10001** (8), **10010** (9).

0.50 J. zdvihne pastelku do vzduchu, hrá sa s vlasmi a pozerá na obrázok.

0.76 J.: „Je deväť tých možností."

Úloha „Rad"



(a)	**00011**
(b)	**00110**
(c)	**00101**
(d)	**01100**
(e)	**01010**
(f)	**11000**
(g)	**01001**
(h)	**10001**
(i)	**10100**
(j)	**10010**

Obr. 1

Hoci obe riešenia začínali rovnako, pri vypisovaní štvrtej možnosti sme objavili rozdiel. Ak si všimneme prvé 3 cesty v riešení úlohy „Mesto", zistíme, že tieto cesty svojim rôznym pokračovaním vyčerpávajú všetky možnosti, ako prejsť popri dvojici nad sebou umiestnených domov z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu takéhoto bloku. Zdá sa, že Jana v ďalších krokoch systematicky, opakovaním rovnakej myšlienky, pokračuje hľadaním ciest z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu zvyšných dvoch blokov. Ďalší traja žiaci zas podobným spôsobom vyznačujú všetky cesty v rámci blokov troch vedľa seba umiestnených domov. V úlohe „Rad“ permutácia (d) zodpovedá použitiu akéhosi „spätného“ princípu tachometra, kde konštantný prvok postupne obsadzuje 4., 3., 2. a 1. pozíciu. Hoci ani v riešení tejto úlohy nie je popisovaný systém presne dodržaný, žiak sa po malých odbočeniach vždy k nemu vracia (pozri permutácie (f) a (g)).

Rozdiel medzi riešením úloh „Mesto“ a „Rad“ by mohol byť spôsobený dvomi faktormi:

1. V úlohe „Rad“ je od začiatku zrejmé, že sa požaduje určenie počtu permutácií piatich prvkov s opakovaním $P'_{2,3}(5)$. S týmto typom úloh sa žiaci stretávajú v škole na hodinách kombinatoriky. Preto by pri riešení nemali nastať problémy so systematickým vypísaním všetkých permutácií. Aby žiak mohol uplatniť rovnaký systém na vyznačovanie ciest, musel by najskôr odhaliť, že cesta je permutácia 2 úsekov „nahor“ a 3 úsekov „vpravo“. Podľa *Törnera* [28] je však pre žiaka náročné spoznať podobnosť v štruktúre úloh. Transformácia tejto – nie typicky školskej úlohy na známy typ $P'_{2,3}(5)$ preto nie je pravdepodobná. Domnievame sa teda, že riešenia tých úloh, u ktorých nie je zrejmá príslušnosť k niektorému zo základných typov úloh, sa budú vyznačovať použitím iných – menej úspešných stratégií z hľadiska vypísania všetkých možností v porovnaní s ostatnými úlohami. Potvrdzuje to i skutočnosť, že žiaci našli v úlohe „Mesto“ a „Hokej“ menej permutácií.

2. Hoci sa v oboch úlohách pôvodne dodržoval rovnaký systém – stratégiou tachometra, tento bol v úlohe „Mesto“ narušený. Domnievame sa, že nedokonalosť použitých stratégií z hľadiska systematického vypísania všetkých možností v riešení úlohy „Mesto“ úzko súvisí s grafickým znázornením prostredia úlohy. Práve toto umožnilo navodiť dojem vyčerpanej podmnožiny skôr, než by zodpovedal stratégii tachometra (chýba permutácia **01001**). Úplný rozklad obrázka na jednotlivé oblasti (napr. mesto na bloky domov) navodzuje dojem, že ak dôjde k vyčerpaniu všetkých permutácií v rámci týchto oblastí podľa nejakého kľúča, nájdeme zároveň všetky permutácie. Hoci si žiak väčšinou uvedomí, že niektoré cesty chýbajú, nie je už možné nájsť systém na ich vyhľadanie.

Nastupuje stratégia pokus-omyl, táto však už nezaručuje nájdenie všetkých permutácií.

Dokončení příště

Martina Janáčková
Gymnázim Veľká okružná
Veľká okružná 22
010 01 Žilina
e-mail: janackova@gvoza.sk

★ ★ ★

PLUH A RÝČE PRO PĚSTITELE MATEMATIKY (3)

PAVLA ZAGOROVÁ

> 5 Vyšel rozsévač rozsívat semeno. Když rozsíval, padlo některé zrno podél cesty, bylo pošlapáno a ptáci je sezobali. ... 8 A jiné padlo do země dobré, vzrostlo a přineslo stonásobný užitek.
>
> [Bible, Lukáš 8, 5-8]

Naším dnešním hlavním tématem budou soutěže v matematice, hádanky, hlavolamy, pohádky a zábavné úlohy a nakonec pár zajímavostí.

Soutěže

Existuje spousta (korespondenčních) soutěží pro mladé (nadané) matematiky. Zadání matematických soutěží poskytují bezednou studnici zajímavých a nevšedních příkladů. Navíc se na serverech po vypršení lhůty na odevzdání soutěžních úloh objeví často velmi důmyslná řešení.