Učitel matematiky

Anton Huťa

Vytvárajúce funkcie

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 3, 133–142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150696

VYTVÁRAJÚCE FUNKCIE

Anton Huťa

Vznik pojmu vytvárajúcich funkcií sa viaže k menu Laplace (1809). Dôležité miesto zaujíma hlavne v oblastiach ako diferenčný počet, teória pravdepodobnosti, kombinatorická analýza a teória čísel.

Rozoznávame dva typy vytvárajúcich funkcií. Majme danú postupnosť čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Ak existuje rad

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

ktorý konverguje v intervale $-t_0 < t < t_0$, potom $A(t)$ je tzv. **obyčajná vytvárajúca funkcia**, resp. **vytvárajúca funkcia pre postupnosť** $\{a_n\}$. Ak je postupnosť $\{a_n\}$ohraničená, potom porovnaním s geometrickým radom dostávame, že rad $A(t)$ konverguje aspoň pre $|t| < 1$.

Ako príklady obyčajných vytvárajúcich funkcií môžeme uviesť

1. Vytvárajúca funkcia pre konečnú postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N$, pričom $a_{N+n} = 0$ pre $n > 0$ je polynóm $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + + \cdots + a_N t^N$. Konkrétne pre $a_n = 1, n = 0, 1, \ldots, N$; $a_{N+n} = 0$ pre $n > 0$ je $A(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^N = \dfrac{1 - t^{N+1}}{1 - t}$. Špeciálne napríklad postupnosť tvaru $a_0 = 1$, $a_n = 0$ pre $n > 0$ má vytvárajúcu funkciu tvaru $1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots = 1$, a tiež postupnosť tvaru $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = -1, a_n = 0$ pre $n > 2$ má vytvárajúcu funkciu tvaru $A(t) = 5 + 3t - t^2 + 0t^3 \cdots = 5 + 3t - t^2$.

2. Vytvárajúce funkcie pre postupnosti čísel

(a) $(n+1) \cdot a_{n+1}$ pre $n = 0, 1, \ldots, (N-1)$

(b) $(n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2}$ pre $n = 0, 1, \ldots, (N-2)$

sú

(a) $A'(t)$, (b) $A''(t)$,

pričom $A(t)$ je vytvárajúca funkcia z prípadu 1 a $A'(t)$ a $A''(t)$ sú prvá a druhá derivácia vytvárajúcej funkcie $A(t)$.

3. Vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\{a^n\}(a = \text{const.})$ pre $n = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, je $A(t) = \dfrac{1}{1-at}$ pre $|at| < 1$, t.j. $|t| < \dfrac{1}{|a|}$.
Špeciálne pre $a = 1$ dostávame

$$A(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Podobne, ak $|t| < 1$ dostávame pre postupnosti

(a) $a_n = 1$, pre $n \geq 0$ vytvárajúcu funkciu tvaru $A(t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-t}$,

(b) $a_n = (-1)^n$, pre $n \geq 0$ vytvárajúcu funkciu tvaru $A(t) = 1 - t + t^2 - t^3 \cdots = \dfrac{1}{1+t}$,

(c) $a_n = 1$, pre $n = 2k$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$, $a_n = 0$, pre $n = 2k+1$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$, vytvárajúcu funkciu tvaru $A(t) = 1+t^2+ t^4 + t^6 + \cdots = \dfrac{1}{1-t^2}$.

4. Vytvárajúce funkcie pre postupnosti

(a) $\{n\}$, (b) $\{n^2\}$, (c) $\{n \cdot (n-1)\}$

sú

(a) $A(t) = \dfrac{t}{(1-t)^2}$, (b) $A(t) = \dfrac{t \cdot (t+1)}{(1-t)^3}$,

(c) $A(t) = \dfrac{2t^2}{(1-t)^3}$

čo bezprostredne vyplýva z vytvárajúcej funkcie z prípadu 3 a postupu z príkladu 2.

V ďalšom si uvedieme základné pravidlá ako pracovať s vytvárajúcimi funkciami.

(i) Ak postupnosť $\{a_n\}$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$ má vytvárajúcu funkciu $A(t)$, potom postupnosť $\{k \cdot a_n\}$, kde $k =$ const. má vytvárajúcu funkciu $k \cdot A(t)$. Špeciálne, napríklad, z príkladu (3c) pre $k = 2$, dáva vytvárajúcu funkciu tvaru $2 + 2t^2 + 2t^4 + 2t^6 + \dots = 2 \cdot \dfrac{1}{1-t^2}$.

(ii) Ak postupnosť $\{a_n\}$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$, má vytvárajúcu funkciu $A(t)$, postupnosť $\{b_n\}$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$, má vytvárajúcu funkciu $B(t)$, potom postupnosť $\{a_n + b_n\}$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$, má vytvárajúcu funkciu $A(t) + B(t)$. Špeciálne, napríklad, ak $A(t) = \dfrac{1}{1-t}$, t.j. prípad (3a) a $B(t) = \dfrac{1}{1+t}$, t.j. prípad (3b), potom $A(t) + B(t) = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} = 2 \cdot \dfrac{1}{1-t^2}$, čo je prípad (i), resp. prípad (3c) pre koeficient rovný hodnote 2.

(iii) Ak postupnosť $\{a_n\}$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$, má vytvárajúcu funkciu $A(t)$, potom postupnosť tvaru $\{b_n\}$, kde $b_n = 0$ pre $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$ a $b_n = a_{n-k}$ pre $n = k, k+1, k+2, \dots$, má vytvárajúcu funkciu $t^k A(t)$. Špeciálne, napríklad, $A(t) = \dfrac{1}{1-t}$ z príkladu (3a), potom postupnosť tvaru $\{b_n\}$, kde $b_n = 0$ pre $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$ a $b_n = 1$ pre $n = k, k+1, k+2, \dots$, má vytvárajúcu funkciu $t^k + t^{k+1} + t^{k+2} + \dots = t^k \cdot (1 + t + t^2 + \dots) = t^k \cdot \dfrac{1}{1-t}$.

(iv) Ak $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, potom $A(t) \cdot B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, kde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Postupnosť $\{c_n\}$ nazývame konvolúciou postupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

Je zaujímavé spomenúť postupnosť takzvaných Fibonacciho čísel[1]. Táto je daná vzťahmi $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pre $n \geq 2$, t.j.

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1,\ a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3, \quad a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8, \quad \text{atď}$$

Našou úlohou bude zostrojiť vytvárajúcu funkciu pre Fibonacciho postupnosť. Položme

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{1}$$

Potom na základe vlastnosti (ii) dostávame, že
$\{\alpha_n\}$, $\alpha_1 = 1, \alpha_n = 0$ pre $n = 0, 2, 3, \ldots$ má vytvárajúcu funkciu t,
$\{\beta_n\}$, $\beta_0 = 0, \beta_n = a_{n-1}$, pre $n \geq 1$ má vytvárajúcu funkciu $t \cdot A(t)$ a konečne
$\{\gamma_n\}$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0, \gamma_n = a_{n-2}$, pre $n \geq 2$ má vytvárajúcu funkciu $t^2 \cdot A(t)$.
Z toho vyplýva, že postupnosť
$\{\delta_n\}, \delta_0 = 0, \delta_1 = 1 + a_0, \delta_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, pre $n \geq 2$ má vytvárajúcu funkciu

$$t + t \cdot A(t) + t^2 \cdot A(t) \tag{2}$$

čo je vytvárajúca funkcia pre pôvodnú Fibonacciho postupnosť. Porovnaním vzťahov (1) a (2) dostávame, $A(t) = t + t \cdot A(t) + t^2 \cdot A(t)$, z čoho vyplýva, že $A(t) - t \cdot A(t) - t^2 \cdot A(t) = t$. Úpravami dostávame

$$A(t) \cdot \left(1 - t - t^2\right) = t,$$

[1] Leonardo Pisano, známy pod menom Fibonacci, taliansky matematik. Informácie o jeho narodení 1170 [3], [4], [5], resp. 1175 [6] ako aj smrti 1250 [3], [6], 1230 [4], 1240 [5] sa rozchádzajú.

t.j.

$$A(t) = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

V ďalšom si ešte odvodíme explicitnú formulu pre vyjadrenie n-tého Fibonacciho čísla. Uvažujme x_1, x_2 také, že platí

$$1 - x - x^2 = (1 - x_1 \cdot x_2) \cdot (1 - x_2 \cdot x)\,. \tag{3}$$

Potom dostávame $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Rozkladom vytvárajúcej funkcie na parciálne zlomky máme

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A_1}{1-x_1\cdot x} + \frac{A_2}{1-x_2\cdot x},$$

z čoho vychádza

$$A_1 = \frac{1}{x_1-x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, A_2 = -\frac{1}{x_1-x_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Platí teda

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1}{1-x_1\cdot x} - \frac{1}{1-x_2\cdot x}\right).$$

Oba zlomky v zátvorke na pravej strane však sú súčty geometrických postupností

$$\frac{1}{1-x_1\cdot x} = 1 + x_1 x + x_1^2 x^2 + \ldots,$$
$$\frac{1}{1-x_2\cdot x} = 1 + x_2 x + x_2^2 x^2 + \ldots.$$

Ak tieto vzťahy dosadíme, dostávame

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1}{1-x_1 \cdot x} - \frac{1}{1-x_2 \cdot x} \right) =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left((1 + x_1 x + x_1^2 x^2 + \dots) - (1 + x_2 x + x_2^2 x^2 + \dots) \right) =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left((1-1) + (x_1 - x_2) \cdot x + (x_1^2 - x_2^2) \cdot x^2 + \dots \right).$$

Z poslednej rovnice máme, že

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (x_1^n - x_2^n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

čím sme odvodili vzorec pre n-té Fibonacciho číslo. Postupnosti vytvorené podľa takéhoto vzťahu nazval Édouard Lucas (1842 – 1891) Fibonacciho číslami.

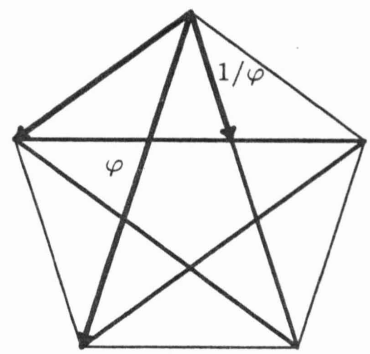
Webové stránky [1], [2] dávajú pekný pohľad na vzťah Fibonacciho čísel k prírode, architektúre, výtvarnému umeniu a hudbe.

Zastavme sa na chvíľku pri hodnote

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033\,988\,74\dots \tag{4}$$

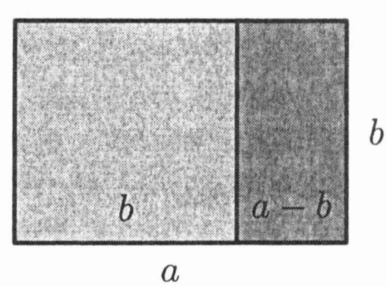
Je to hodnota zlatého rezu, označovaného gréckym písmenom φ. Dá sa tiež dokázať, že

$$\lim_{n\to 0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi$$



Hodnotu $1/\varphi$ využívali už grécki architekti. Svedectvom je svetoznámy Panteón. Aj v súčasnosti ho s úspechom využívajú architekti, umelci a designéri.

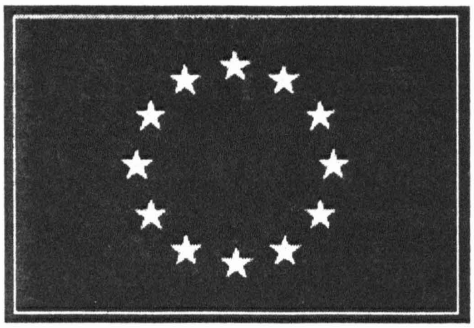
K polynómu (3) môžeme dospieť aj nasledujúcim spôsobom. Uvažujme obdĺžnik so základňou a a bočnou stranou b, kde $0 < b < a$, pre ktoré platí $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$.

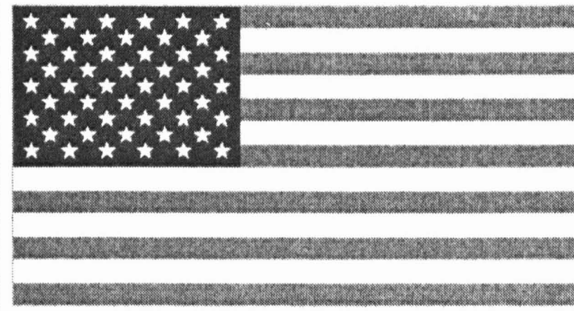


Z toho dostávame $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$. Ak dosadíme $\frac{a}{b} = x$, dostávame polynóm (3), koreňom ktorého je práve hodnota daná vzťahom (4). Druhý koreň polynómu (3) je $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

S päťuholníkom[2] úzko súvisí aj päťcípa hviezda. Táto je súčasťou zástav Európskej únie aj USA, kde na prvej sú žlté, na druhej sú biele a tiež symbolom esperanta je zelená päťcípa hviezda.

[2]Pripomeňme si konštrukciu päťuholníka. Na úsečke AB určíme bod F tak, že $|EC| = |EF|$, kde bod E je stred strany AS. FD je strana päťuholníka. Pre





Poznamenajme ešte, že existuje Fibonacciho spoločnosť (Fibonacci Society), so sídlom v USA, založená 1962, ktorá vydáva od roku 1963 časopis *Fibonacci Quarterly* venovaný Fibonacciho číslam a otázkam s nimi súvisiacimi.

Druhým typom sú tzv. **exponenciálne vytvárajúce funkcie**. Pre postupnosť $\{a_n\}$ je to rad tvaru

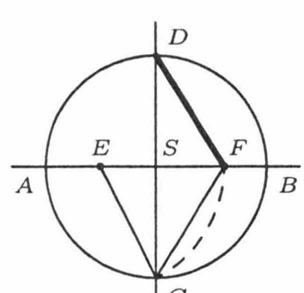
$$E(t) = a_0 + a_1 \cdot \frac{t}{1!} + a_2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \cdot \frac{t^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{t^n}{n!}.$$

Ako príklady exponenciálnych vytvárajúcich funkcií môžeme uviesť:

1. Exponenciálna vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\{a^n\}$ ($a =$ const.) pre $n = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ je

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^{at}.$$

úplnosť dodajme, že SF je strana desaťuholníka a SD strana šesťuholníka.



Konkrétne pre postupnosť $\{1\}$, t.j. $a_n = 1$ pre všetky n je

$$E(t) = \mathrm{e}^t.$$

2. Podobne ako v prípade obyčajných vytvárajúcich funkcií dostávame, že exponenciálne vytvárajúce funkcie pre postupnosti

(a) $\{n\}$, (b) $\{n \cdot (n-1)\}$, (c) $\{n^2\}$,

sú

(a) $E(t) = t \cdot \mathrm{e}^t$, (b) $E(t) = t^2 \cdot \mathrm{e}^t$,

(c) $E(t) = t \cdot (t+1) \cdot \mathrm{e}^t$.

Literatúra

[1] Fibonacci Numbers and Nature
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html

[2] Fibonacci Numbers and The Golden Section in Art, Architecture and Music
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html

[3] Who was Fibonacci?
http://pages.zdnet.com/triofibonacci/home/id13.html

[4] MATEMATIKCILER FIBONACCI, Leonardo
http://www.matematikdosyasi.com/matematikci.php?id=14

[5] Web sites relevant to the History of Mathematics in Europe
http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/mathhist/europe.html

[6] The Life Of Fibonacci
http://www.bath.ac.uk/ ma2pi/lflife.html

[7] Kaucký, J., *Kombinatorické identity*, Bratislava, Veda, 1975

[8] Laplace, Mémoire sur divers points d'analyse. Journal de l'Ecole Polytechnique 8 15^e cahier (December 1809) pp. 229-65. Oeuvres 14, s. 178-214

[9] Fibonacci Society http://www.fibonaccisociety.com/

[10] Riordan, J.: An Introduction to Combinatorial Analysis. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Haall, 1958 (viď. tiež ruský preklad IIL, Moskva, 1963)

[11] Riordan, J.: Combinatorial Identiies. New York - London - Sydney: J. Wiley & Sons, 1968 (viď. tiež ruský preklad Nauka, Moskva, 1982)

RNDr. Anton Huťa,Ph.D.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: anton.huta@fmph.uniba.sk