Učitel matematiky

Aleš Kobza
Planimetrická úloha o extrému

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 2, 89–94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150689

PLANIMETRICKÁ ÚLOHA O EXTRÉMU

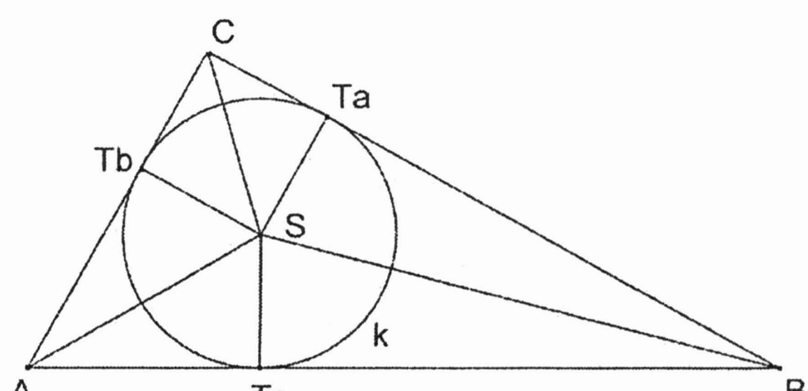
Aleš Kobza

Při své přednášce na XIII. semináři o filosofických otázkách matematiky a fyziky, který se konal 21.–24. srpna 2006 ve Velkém Meziříčí, vyzval RNDr. Dag Hrubý přítomné účastníky k zamyšlení nad následující zajímavou úlohu.

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem ρ. Úkolem je nalézt pravoúhlý trojúhelník ABC o nejmenším možném obsahu takový, aby kružnice k byla kružnicí jemu vepsanou.

Vzhledem k tomu, že se jedná o úlohu, která je zcela řešitelná středoškolskými prostředky, navíc při jejím řešení lze hezky propojit poznatky z různých oblastí matematiky (planimetrie, trigonometrie trojúhelníku, vyšetřování extrémů funkce, ...), rozhodl jsem se ji ve svém příspěvku rozebrat.

Nechť C značí vrchol hledaného trojúhelníku ABC, u něhož leží pravý úhel. Strany trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem malými písmeny. Konečně body dotyku kružnice k se stranami trojúhelníku označme T_x, kde x je strana, na níž dotykový bod leží (obr. 1).



Obr. 1

Poznamenejme, že vyřešit zadanou úlohu znamená délky všech stran trojúhelníku ABC vyjádřit v závislosti pouze na parametru ρ a to tak, aby jeho obsah nabýval požadovaného extrému.

Než se pustíme do vlastního řešení, uvědomme si ještě zřejmou skutečnost, že libovolný trojúhelník, který má vepsanou kružnici s poloměrem ρ, musí mít každou ze svých stran delší než 2ρ. V dalším ukážeme dvě různá řešení zadané úlohy.

1. řešení. Nejprve provedeme obvyklý postup, jakým řešíme úlohu, v níž hledáme extrém funkce. Začneme odvozením vztahu, kterým je obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC vyjádřen jako funkce jedné proměnné (délky *vhodné* strany tohoto trojúhelníku) a parametru ρ. Poté s využitím diferenciálního počtu najdeme algoritmickým způsobem minimum této funkce. Při řešení druhou metodou si navíc povšimneme, že k tomu, abychom úlohu vyřešili právě popsaným způsobem, opravdu nelze obsah trojúhelníku ABC vyjádřit pomocí délky zcela *libovolné* jeho strany (a parametru ρ).

Snadno nahlédneme, že čtyřúhelníky T_bAT_cS a T_cBT_aS jsou deltoidy a čtyřúhelník CT_bST_a je čtvercem o straně délky ρ. Proto pro délku přepony platí

$$c = a + b - 2\rho. \tag{1}$$

Dosazením (1) do Pythagorovy věty, kterou dle našeho označení můžeme zapsat ve tvaru $c^2 = a^2 + b^2$, po úpravě dostáváme

$$2ab - 4a\rho - 4b\rho + 4\rho^2 = 0. \tag{2}$$

Vyjádříme-li z rovnice (2) a, máme

$$a = \frac{2\rho(b-\rho)}{b-2\rho}. \tag{3}$$

Pro úplnost dodejme, že vztah (3) je zapsán korektně, neboť víme, že jeho jmenovatel musí být kladný. Protože obsah S pravoúhlého trojúhelníku je roven polovině součinu délek jeho odvěsen, tj.

$$S = \frac{1}{2}ab, \tag{4}$$

obdržíme po dosazení za a z (3) do (4)

$$S = \frac{b^2\rho - b\rho^2}{b - 2\rho}. \tag{5}$$

Všimněme si ještě, že rovnice (2) je z pohledu a a b symetrická, proto by vztah (5) vyšel zcela analogicky (pouze v proměnné a) i v případě, kdybychom z rovnice (2) vyjádřili neznámou b.

Derivací (5) dostáváme

$$S' = \frac{\rho\left(b^2 - 4b\rho + 2\rho^2\right)}{(b - 2\rho)^2}. \tag{6}$$

Položíme-li v (6) $S' = 0$, vychází nám stacionární body $b = (2 \pm \pm \sqrt{2})\rho$. Ovšem hodnota $b = (2 - \sqrt{2})\rho$ nesplňuje podmínku $b > > 2\rho$, proto ji dále nebudeme uvažovat. Vzhledem k tomu, že o znaménku S' rozhoduje znaménko výrazu

$$b^2 - 4b\rho + 2\rho^2 = \left[b - \left(2 + \sqrt{2})\rho\right)\right]\left[b - (2 - \sqrt{2})\rho\right],$$

vidíme, že $S' < 0$ pro $b \in \left(2\rho, (2 + \sqrt{2})\rho\right)$, zatímco $S' > 0$ pro $b > (2 + \sqrt{2})\rho$. To znamená, že funkce S nabývá v bodě $b = = (2+\sqrt{2})\rho$ svého globálního minima. Postupným dosazováním za $b = (2+\sqrt{2})\rho$ do (3), (1) a (5) pak zjišťujeme, že nejmenší možný obsah $S_{min} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\rho^2$ má rovnoramenný trojúhelník ABC o délkách odvěsen $a = b = (2 + \sqrt{2})\rho$ a přepony $c = 2(1 + \sqrt{2})\rho$.

2. řešení. Nyní úlohu vyřešíme způsobem, při němž nebudeme potřebovat znalost diferenciálního počtu. Za tímto účelem odvodíme ještě další vyjádření obsahu trojúhelníku ABC, tentokrát pomocí délky přepony a poloměru kružnice vepsané. Obsah trojúhelníku ABC totiž můžeme spočítat i tak, že sečteme obsahy deltoidů T_bAT_cS a T_cBT_aS a čtverce CT_bST_a, tj. útvarů, na které lze trojúhelník ABC „rozřezat“. Vzhledem k tomu, že každý z těchto deltoidů je tvořen dvěma shodnými pravoúhlými trojúhelníky, platí

$$S = (b - \rho)\rho + (a - \rho)\rho + \rho^2 = (a + b)\rho - \rho^2. \tag{7}$$

Vyjádřením $a + b$ z výše získaného vztahu (1) a dosazením do (7) dostáváme

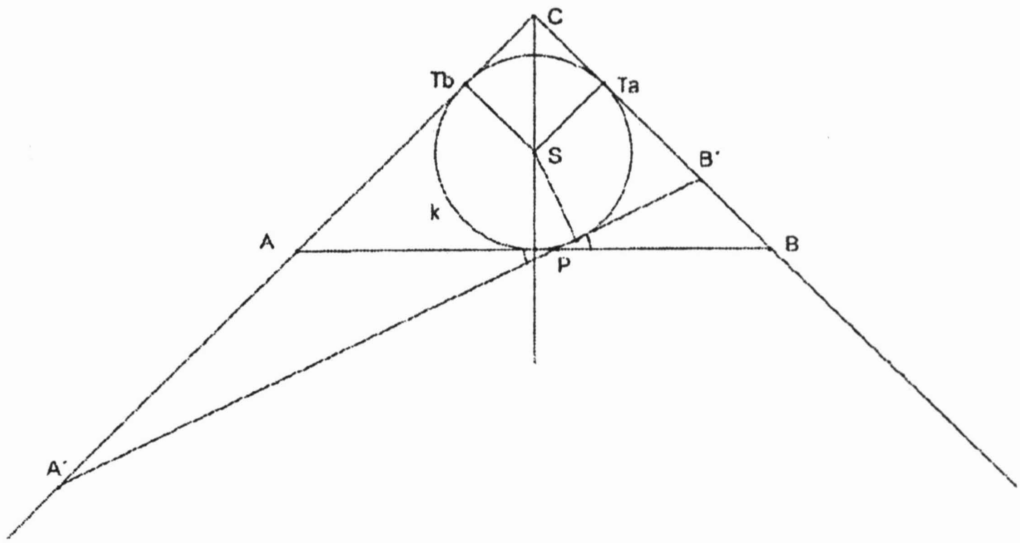
$$S = c\rho + \rho^2. \tag{8}$$

Ze vztahu (8) vyplývá, že čím kratší přeponu bude trojúhelník ABC mít, tím menší bude jeho obsah. Naším úkolem je tedy nalézt nejkratší možnou délku přepony c tak, aby trojúhelník ABC požadovaných vlastností existoval.

Pokud bychom (8) chápali jako funkci proměnné c s parametrem ρ bez jakýchkoliv dalších podmínek, mohli bychom konstatovat, že tato funkce nemá extrém. Jestliže bychom však na základě této skutečnosti tvrdili, že úloha proto nemá řešení, byla by taková úvaha chybná! Přepona hledaného trojúhelníku totiž nemůže mít libovolně malou délku. Víme, že délka každé strany trojúhelníku ABC musí být větší než 2ρ. Užitím Pythagorovy věty odtud pro přeponu dostáváme lepší odhad $c > 2\sqrt{2}\rho$, ovšem, jak již víme, ani tato podmínka stále není dostatečná pro existenci trojúhelníku ABC. Z uvedeného pouze vyplývá, že výpočet minimální možné délky přepony c není možné provést pomocí derivace (8) a budeme proto muset postupovat jiným způsobem.

Představme si řešený problém geometricky. Uvažujme kružnici k se středem S a poloměrem ρ. Ve vzdálenosti $\sqrt{2}\rho$ od bodu S pak zvolme libovolně ale pevně bod C. Z bodu C sestrojme tečny ke kružnici k a příslušné dotykové body označme v souladu s předchozím značením T_a a T_b. Vedeme-li nyní libovolnou tečnu ke kružnici k takovou, aby protla obě dvě polopřímky opačné k polopřímkám $\overrightarrow{T_aC}$ a $\overrightarrow{T_bC}$, dostaneme vždy jistý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu C, jehož kružnicí vepsanou je kružnice k. Zbývá rozřešit otázku, který ze všech těchto trojúhelníků má nejkratší přeponu.

Uvažme nejprve tu z popsaných tečen, která je kolmá k ose úhlu $\sphericalangle T_aCT_b$. Její průsečík s polopřímkou $\overrightarrow{CT_b}$ označme A a průsečík s polopřímkou $\overrightarrow{CT_a}$ označme B. Právě sestrojený trojúhelník ABC je zřejmě rovnoramenný. Dále uvažme jinou tečnu kružnice k s výše uvedenými vlastnostmi (tedy tečnu různou od přímky $\overleftrightarrow{AB}$) a analogicky jako v předchozím na ni definujme body A' a B'. Bez újmy na obecnosti můžeme v dalším předpokládat, že



Obr. 2

$|A'C| > |B'C|$ (viz obr. 2). Tato úmluva nám formálně zjednoduší následující úvahy. Ještě označme P průsečík úseček AB a $A'B'$.

Zbývá dokázat to, co „vidíme" z obrázku, tj. že nejkratší možnou přeponu má právě rovnoramenný trojúhelník. Toto dokážeme, ukážeme-li, že

$$|A'B'| - |AB| > 0, \tag{9}$$

protože $A'B'C$ je libovolný trojúhelník (různý od rovnoramenného) s pravým úhlem u vrcholu C a vepsanou kružnicí k. Vzhledem k tomu, že platí

$$\begin{aligned} |AB| &= |AT_b| + |BT_a|, \\ |A'B'| &= |A'T_b| + |B'T_a| \end{aligned}$$

a že body T_b, A a A' (resp. T_a, B a B') jsou kolineární, takže

$$\begin{aligned} |A'T_b| - |AT_b| &= |A'A|, \\ |BT_a| - |B'T_a| &= |B'B|, \end{aligned}$$

je nerovnost (9) ekvivalentní s nerovností

$$|A'A| - |B'B| > 0. \tag{10}$$

Vyjádříme-li délky úseček vystupujících v (10) pomocí sinové věty v trojúhelnících $AA'P$ a $BB'P$, dostáváme

$$|A'A| = \frac{\sin(\sphericalangle APA')}{\sin 135^\circ} \cdot |A'P| \tag{11}$$

a

$$|B'B| = \frac{\sin(\sphericalangle BPB')}{\sin 45^\circ} \cdot |B'P|\,. \tag{12}$$

Neboť $|\sphericalangle APA'| = |\sphericalangle BPB'|$ a $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, obdržíme z (11) a (12)

$$|A'A| - |B'B| = \sqrt{2}\,(|A'P| - |B'P|)\sin(\sphericalangle APA')\,. \tag{13}$$

Nyní si uvědomme, že $|\sphericalangle BPB'| < 45^\circ$. Kdyby tomu tak nebylo, pak by bod A' nemohl ležet na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{T_bC}$, což by byl spor. To znamená, že úhel $\sphericalangle PB'B$ je tupý. Vzhledem k tomu, že v libovolném trojúhelníku leží proti většímu úhlu delší strana, platí následující nerovnosti

$$|A'P| > |AP| > |BP| > |B'P|\,. \tag{14}$$

Konečně z (13) a (14) plyne, že (10) platí. To však vzhledem ke zmíněné ekvivalenci znamená i platnost nerovnosti (9), čímž je důkaz hotov.

Zjistili jsme tedy, že trojúhelník ABC je rovnoramenný. Protože délka jeho přepony je dvojnásobkem délky výšky v na ni, přičemž $v = \rho + |SC|$, snadno vypočteme, že $c = 2(1+\sqrt{2})\rho$. Dosazením tohoto výsledku do (8) nám vychází nejmenší možný obsah $S_{min} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\rho^2$. Konečně jednoduchým užitím Pythagorovy věty, pak dostáváme $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}c = (2+\sqrt{2})\rho$.

Mgr. Aleš Kobza, Ph.D.
Gymnázium Brno
tř. Kpt. Jaroše 14
658 70 Brno
e-mail: akob@jaroska.cz