Učitel matematiky

Marcela Miková

Vlastnosti funkcí

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 2, 79–88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150688`

VLASTNOSTI FUNKCÍ

MARCELA MIKOVÁ

Téma *Funkce* je na gymnáziu probíráno zpravidla ve druhém ročníku a je mu věnován téměř celý školní rok. Na toto téma navazuje ve čtvrtém ročníku diferenciální a integrální počet. Tuto náročnou látku není možné zvládnout bez znalosti a pochopení vlastností funkcí.

Ve své výuce jsem věnovala právě vlastnostem funkcí velkou pozornost. Při výkladu vlastností funkcí jsem se rozhodovala mezi dvěma postupy:

1. Definovat jednotlivé vlastnosti postupně, vždy v souvislosti s určitou elementární funkcí. (Viz [2], [4].)
2. Nejprve studentům vysvětlit, jaké vlastnosti funkce mohou mít, a později při výkladu jednotlivých typů funkcí nechat studenty samostatně rozhodnout, které z vlastností nově zaváděná funkce má. (Viz [3].)

Rozhodla jsem se postupovat druhým z uvedených způsobů. Tento způsob podle mého názoru umožňuje větší podíl samostatné práce studentů při pozdějším výkladu elementárních funkcí.

Cílem výuky vlastností funkcí bylo, aby studenti

a) k zadaným vlastnostem dokázali nalézt funkci, která má všechny tyto vlastnosti (např. načrtli její graf nebo funkci jinak vyjádřili),

b) byli schopni určit z grafu **definiční obor** a **obor hodnot funkce**, **průsečíky s osami souřadnic** a rozhodnout, zda má funkce **maximum** či **minimum** (a pokud ano, pak **v jakých bodech**), zda je **prostá**, **monotónní** (a upřesnit, zda je funkce **rostoucí**, **nerostoucí**, **klesající** či **neklesající**), zda je funkce **sudá**, **lichá**, **omezená** či nikoliv a zda je alespoň **shora omezená** či **zdola omezená**,

c) uměli sami v následujících hodinách věnovaných elementárním funkcím přiřadit funkcím příslušné vlastnosti.

V úvodu k tématu *Funkce* jsem nejprve s využitím velkého množství grafů postupně zavedla všechny shora uvedené pojmy a až po jejich důkladném procvičení jsem definovala elementární funkce. Po definování každého typu funkce studenti samostatně určovali množinu vlastností příslušejících definované funkci. Chtěla jsem, aby byli schopni posoudit, které z nalezených vlastností jsou společné pro všechny funkce daného typu, a které jsou specifické pouze pro některou podmnožinu dané množiny funkcí nebo jen pro konkrétní funkci. Ukáži to na jednoduchém příkladu lineárních funkcí.

Lineární funkce je definována předpisem $y = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla. Pro tuto množinu funkcí platí, že jejich definičním oborem je množina všech reálných čísel, jsou monotónní a mají jeden průsečík s osou y.

Pokud se zaměříme na podmnožinu lineárních funkcí, pro které platí $a \neq 0$ (tj. na funkce, které nejsou konstantní), jsou tyto funkce prosté, ryze monotónní, nejsou shora ani zdola omezené a mají jeden průsečík s osou x a jejich oborem hodnot je množina všech reálných čísel.

Tuto podmnožinu můžeme ještě zúžit na podmnožinu zahrnující pouze přímé úměrnosti, tj. na funkce typu $y = ax$, kde $a \neq 0$. Tyto funkce jsou všechny liché a procházejí bodem $[0;0]$.

Na závěr se můžeme zabývat konkrétní funkcí danou předpisem $y = 3x$, o které již víme vše, tj. že je rostoucí, prochází bodem $[0;0]$, je lichá, a jejím definičním oborem i oborem hodnot je množina všech reálných čísel.

Poté, co jsme všechny vlastnosti funkcí probrali, jsem zadala následující test. Jeho úkolem bylo zjistit, zda studenti látku chápou a kde bude nutné zvolit příště lepší metodiku výuky. Test se skládal z šesti úloh. Úlohy byly zaměřeny na následující znalosti a dovednosti:

Úloha 1: Načrtnout graf funkce podle zadaných vlastností.

Úloha 2: Popsat vlastnosti funkce z jejího grafu.

Úloha 3: Vytvořit předpis funkce vyhovující zadanému definič-

nímu oboru.
Úloha 4: Odvodit vlastnosti funkce z daného předpisu funkce.
Úloha 5: Určit vlastnosti funkce zadané slovně.
Úloha 6: Vysvětlit význam daného pojmu.

Tento test byl zadán jako čtvrtletní písemná práce a psalo jej 25 studentů. U každé úlohy uvádím její zadání, stručné zhodnocení výsledků a analýzu chyb.

Úloha 1

Oddělení A

Načrtněte graf nějaké funkce s následujícími vlastnostmi:

a) Funkce f: $\mathsf{D}(f) = \langle -3, \infty)$, průsečíky s osami jsou $P_1 = [0,1]$, $P_2 = [-2,0]$, $P_3 = [3,0]$, funkce f je neklesající v intervalu $\langle -3, 2\rangle$, klesající v intervalu $(2, +\infty)$, omezená zdola hodnotou -4, ostré maximum v bodě 2, $f(2) = 2$, minimum funkce nemá. Zapište obor hodnot této funkce.

b) Funkce g: $\mathsf{D}(g) = \langle -4, 4\rangle$, $\mathsf{H}(g) = \langle 0, 6\rangle$, g je sudá, minimum funkce g je bodě 0.

Oddělení B

Načrtněte graf nějaké funkce s následujícími vlastnostmi:

a) Funkce f: $\mathsf{D}(f) = (-\infty, 5\rangle$, průsečíky s osami jsou $P_1 = [2,0]$, $P_2 = [0,-3]$, $P_3 = [-2,0]$, funkce f je v intervalu $(-\infty, 0)$ klesající a omezená shora hodnotou 5, neklesající v intervalu $(0, 5\rangle$, ostré minimum funkce je v bodě 0, $f(0) = -3$, maximum funkce nemá. Zapište obor hodnot této funkce.

b) Funkce g: $\mathsf{D}(g) = \langle -4, 4\rangle$, $\mathsf{H}(g) = \langle -3, 3\rangle$, g je lichá, minimum funkce g je v bodě -1.

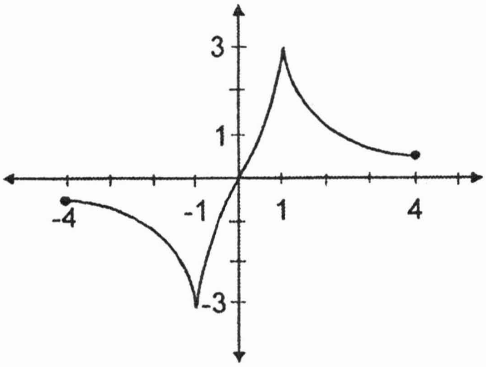
ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ:

a) V této úloze byla testována znalost následujících pojmů: definiční obor, průsečíky s osami, neklesající funkce, klesající funkce, zdola omezená funkce, shora omezená funkce, ostré maximum, ostré minimum funkce, obor hodnot funkce. Termín „funkce zdola omezená hodnotou 4“ respektive „funkce shora omezená hodnotou 5“ jsem použila místo termínů supremum a infimum funkce, které se na gymnáziu nepoužívají. Studenti byli z výuky na shora uvedená vyjádření zvyklí.

b) Cílem úlohy bylo ověřit pochopení pojmu sudá funkce, lichá funkce, maximum, minimum funkce. V této úloze se projevil velký rozdíl v úspěšnosti řešení mezi oddělením A (sudá funkce) a B (lichá funkce).

V oddělení A načrtli graf sudé funkce všichni studenti kromě dvou. Studenti oddělění B, kteří měli načrtnout graf funkce liché s minimem v bodě -1, nebyli většinou schopni splnit všechny požadavky zadané úlohy.

Z celkového počtu třinácti studentů řešících oddělení B měli tuto úlohu správně pouze dva. Načrtli graf, který vypadal přibližně takto:



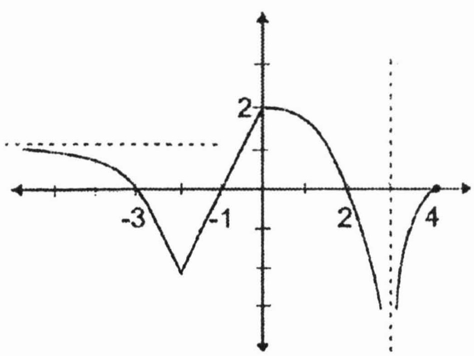
ANALÝZA CHYB:

Oddělení A mělo úlohu o dost jednodušší, protože zadané minimum leží v ose souměrnosti grafu funkce. Nevím, zda by úloha dopadla stejně dobře, kdyby bylo zadáno lokální minimum funkce např. v bodě 2. Studenti řešící úlohy oddělení B načrtnout vyhovující funkci neuměli. Je možné, že studentům je osová souměrnost grafu sudé funkce bližší než středová souměrnost grafu funkce liché. Při dalším zadávání tohoto testu bych v oddělení A zadala minimum funkce mimo osu souměrnosti jejího grafu.

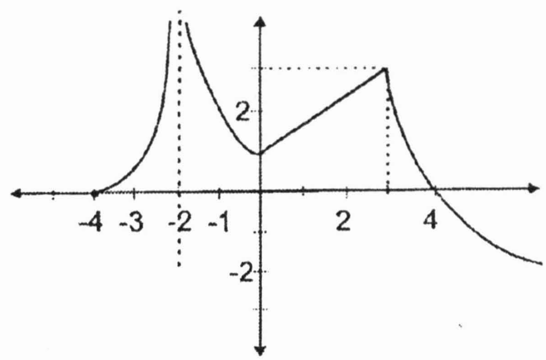
Úloha č. 2:

Uveďte co nejvíce vlastností funkce f znázorněné v grafu:

A



B



ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ:

Tato úloha požaduje po studentech

a) vědět, které všechny vlastnosti funkce se uvádějí při popisu jejího průběhu,

b) umět tyto vlastnosti vyčíst z grafu.

ANALÝZA CHYB:

Ukázalo se, že větší potíže studentům činilo dostát požadavku a). Jen výjimečně byly uvedeny chybné vlastnosti, v odpovědích však často nebyly uvedeny vlastnosti všechny. Našlo se několik zajímavých odpovědí, např. jeden ze studentů uvedl, že „funkce je v bodě 3 omezená zprava“ (oddělení A). Představa sudé funkce jako funkce, jejíž graf je souměrný podle osy vedla zřejmě jiného ze studentů k závěru, že funkce v oddělení B je „sudá podle osy v bodě -2“. Tyto chyby mi ukázaly, které pojmy jsem studentům nevysvětlila dostatečně.

Úloha č. 3:

Oddělení A

Zapište předpisem libovolnou funkci, jejíž definiční obor je $\mathsf{D}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

Oddělení B

Zapište předpisem libovolnou funkci, jejíž definiční obor je $\mathsf{D}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

Tuto úlohu studenti buď vyřešili správně (19 studentů), nebo jí nevyřešili vůbec. Mezi řešeními se tedy nevyskytla žádná funkce nevyhovující zadání.

Při hledání předpisu vyhovující funkce neprojevili studenti až na výjimky nijak velkou fantazii, ale to po nich úloha ani nechtěla. Proto se v odpovědích nejčastěji vyskytovala funkce tvaru $y = \frac{1}{(x+3)\cdot(x-1)}$. Vyskytly se ale i odvážnější. Jeden umístil do čitatele místo jedničky pětku, další šel ještě dále a i do čitatele vložil argument x: $y = \frac{2x^2}{(x+3)\cdot(x-1)}$. V jednom případě se ve jmenovateli vyskytly absolutní hodnoty (zřejmě pod dojmem látky probírané v předchozí hodině): $y = \frac{1}{|x+3|} + \frac{1}{|x-1|}$. Můj obdiv sklidil student, který uvedl funkci: $y = \frac{x}{\frac{x-1}{x+3}}$.

Úloha č. 4:

Uveďte co nejvíce vlastností funkce:

Oddělení A

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$$

Oddělení B

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-5}}$$

Očekávala jsem, že tato úloha bude pro studenty obtížná vzhledem k tomu, že ještě netušili nic o průběhu funkce s neznámou ve jmenovateli, tím spíše, je-li neznámá v odmocněnci. Ukázalo se, že studenti s určitou dávkou „matematické představivosti“ jsou schopni odvodit mnoho vlastností i takové funkce, se kterou se do té doby nesetkali, ale jejíž předpis pro ně po stránce matematické není zcela neznámý.

Všichni studenti správně určili *definiční obor*, polovina studentů správně určila *obor hodnot* a *omezenost funkce zdola*. Ačkoliv to úloha nepožadovala, pokusilo se čtrnáct studentů načrtnout *graf funkce*, sedm z nich jej načrtlo správně.

Myslím si, že je užitečné zkoušet objevovat vlastnosti různých funkcí ještě před výkladem elementárních funkcí. Studenti si ověří, že není nutné se vlastnosti elementárních funkcí učit zpaměti, protože je téměř vždycky dokáží odvodit sami.

Budeme-li se v hodinách ještě zabývat tím, jak se funkce chová v určitých bodech, nebo jak se mění její hodnota s rostoucím (klesajícím) argumentem, připravujeme studenty na pozdější pochopení pojmu limita.

Úloha č. 5:

Zapište, které vlastnosti má následující funkce:

Oddělení A

Jejím definičním oborem je množina všech přirozených čísel, pro všechna x dělitelná třemi je funkční hodnota rovna jedné a pro všechna ostatní x je funkční hodnota rovna nule.

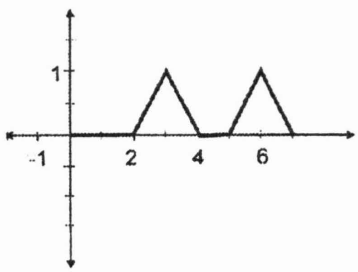
Oddělení B

Jejím definičním oborem je množina všech přirozených čísel, pro všechna sudá x je funkční hodnota rovna jedné, pro lichá x je funkční hodnota rovna nule.

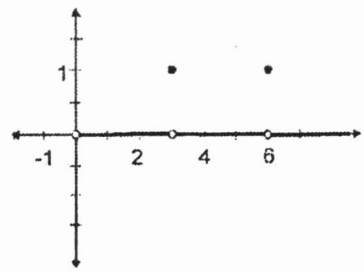
Tato úloha se ukázala být nejobtížnější z celého testu. Projevila se zde nezkušenost studentů se slovně zadanými funkcemi a možná i všeobecná „neláska" ke slovním úlohám. V oddělení A měli někteří potíže rozdělit obor přirozených čísel na čísla dělitelná třemi a ta ostatní. Ačkoliv to zadání úlohy nepožadovalo, snažili se studenti načrtnout graf funkce. Podařilo se to však pouze jedenácti studentům. Nejčastější chybou v grafu bylo spojování bodů vyhovujících zadání funkce tak, že znázorněná funkce měla definiční obor $\mathbb{R}^+$ (viz obr. 1 a 2). Několikrát se vyskytl i graf funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Z}$.

Ukázky:

Obr. 1



Obr. 2



Vedle grafu byl pro studenty největším oříškem *obor hodnot.* Ten byl chybně uveden u šestnácti studentů. Obvykle zaměnili množinu $\{0, 1\}$ za interval $\langle 0, 1 \rangle$, což souvisí s chybně nakreslenými grafy. Jedenáct studentů neuvedlo, že je funkce omezená.

Úloha č. 6:

Oddělení A

Vlastními slovy napište, co znamená pojem *shora omezená funkce.*

Oddělení B

Vlastními slovy napište, co znamená pojem *prostá funkce.*

Cílem této úlohy bylo zjistit, zda studenti chápou uvedené pojmy a zda je dovedou nějak popsat. Přesné znění definice jsem po studentech nechtěla z toho důvodu, že nemusí vypovídat o porozumění pojmu. Nejvíce chyb se vyskytlo v odpovědích oddělení B, kde studenti zaměnili argument a hodnotu funkce. Jejich odpověď proto často zněla takto: „Prostá funkce je taková, kde pro každé x z definičního oboru existuje nejvýše jedno y.“ Jsem si však jistá, že kdyby měli studenti z grafů několika funkcí vybrat grafy funkcí prostých, chybu by neudělali.

Při příštím zadávání tohoto testu doplním tuto úlohu ještě obrázky několika funkcí, z nichž bude třeba vybrat funkci prostou (nebo naopak funkci, nesplňující tuto podmínku). To mi ukáže, zda studenti pojmu nerozumí vůbec, nebo zda jde pouze o záměnu x a y. Až budou studenti pojmu opravdu dobře rozumět, budou podle mě také schopni napsat jeho přesnou definici, aniž by se jí museli učit zpaměti. Podle mého názoru studentům ve druhém ročníku ještě dělá potíže matematická symbolika a jazyk v definicích používaný.

V oddělení A měli téměř všichni vysvětlení pojmu *shora omezená funkce* správně, ale musím se zmínit o jedné zajímavosti v odpovědích. Většina studentů totiž napsala: „Shora omezená funkce je taková, která se stále blíží k nějaké hodnotě, ale nikdy k ní nedosáhne. Přibližuje se ke své nejvyšší hodnotě". Tato formulace poukázala na chybu, které jsem se zřejmě ve výuce dopustila. Myslím, že jsem studentům nenačrtla dost různých funkcí s touto vlastností a jim v paměti utkvěla pouze funkce shora omezená a zároveň rostoucí. Při diskusi o výsledcích testu jsem studentům ukázala i jiné typy funkcí omezených a doufám, že nyní je jim tento pojem naprosto jasný. Stejně jako v oddělení B bych při příštím zadání tohoto testu k úloze přidala několik grafů funkcí, z nichž by studenti měli vybrat funkce omezené (nebo naopak ty, které omezené nejsou).

Závěr

Výsledky tohoto testu mi přinesly velké množství užitečných informací o způsobu, jakým si studenti osvojují některé pojmy. Pro výklad vlastností funkcí jsem si vyvodila několik poučení:

1. Nejprve vysvětlím obsah nového pojmu s pomocí ukázek na velkém počtu různých grafů funkcí. Přesnou matematickou definici s užitím matematické symboliky doporučuji uvést až na závěr. (Této definice se studenti obvykle leknou a kdybychom s ní začali, nemuseli by se z úleku do konce hodiny vzpamatovat a náš výklad by tak přišel vniveč.)

2. Po vysvětlení pojmu na dostatečném počtu grafů budu trvat na jeho aktivním osvojení studenty. Nechám studenty načrtávat nejrůznější grafy funkcí, nejprve s jednou požadovanou vlastností. Když studenti tento pojem ovládnou, zvýším počet požadovaných vlastností funkce.

3. Nebudu se bát „netradičních“ funkcí (viz úloha č. 5), protože později se s nimi studenti již patrně nesetkají.

4. Při hledání vlastností funkce užiji nejrůznější způsoby zadání funkce. Jak se ukázalo, např. slovní zadání funkce je pro studenty velkým oříškem. Funkci ale můžeme také zadat tabulkou, uspořádanými dvojicemi čísel – souřadnicemi bodů, v jednodušším případě i rovnicí.

Literatura

[1] Bürger, Fisher, Malle, *Mathematatik Obersufe 1*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, WiebBrno, 1989

[2] Odvárko, O., Fořt, J., Novák, B., *Matematika pro gymnázia, sešit 3*, SPN, 1978

[3] Odvárko, O., Božek, M., Ryšánková, M., Smida, J., *Matematika pro II. ročník gymnázií*, SPN, Praha, 1985

[4] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia – Funkce*, Prometheus, Praha, 1994

[5] Schulz, W., Stoye, W., *Mathematik 8*, Volk und Wissen Verlag GMBH, Berlin, 1995

Mgr. Marcela Miková, Ph.D.
Gymnázium
Máchova 174
386 48 Strakonice
e-mail: mikova@gymstr.cz