Jana Příhonská

Separované modely Pascalova trojúhelníka (1)

*Učitel matematiky*, Vol. 15 (2007), No. 1, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150665

# SEPAROVANÉ MODELY PASCALOVA TROJÚHELNÍKA

Jana Příhonská

Blaise Pascal se narodil 19. července 1623 v Clermontu v rodině matematika Etienna Pascala, od něhož získával první matematické vzdělání. Již od dětství vynikal matematickým nadáním. Značnou zálibu projevoval v geometrii, studoval práce řeckého matematika Apollóna z Pergy.

Ve dvanácti letech sestavil vlastní geometrickou soustavu založenou na Eukleidovi a v 16 letech napsal studii o kuželosečkách, kde je mimo jiné obsažena i věta o šestiúhelníku vepsaném do kuželosečky. Studoval matematiku, fyziku a filozofii. V roce 1653 zaslal Chevalier de Méré Pascalovi dva problémy hazardních her. Pascal v roce 1654 v dopisech konzultoval tuto problematiku s francouzským matematikem P. Fermatem a nizozemským matematikem a fyzikem Ch. Huygensem a přispěl k rozvoji myšlenek teorie pravděpodobnosti. Současně studoval i otázky kombinatoriky. V *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku* vyslovil několik základních pouček teorie pravděpodobnosti a kombinatoriky – zabýval se výpočty binomických koeficientů. Prvky binomického rozdělení pravděpodobnosti dávají známý symetrický Pascalův trojúhelník. Trojúhelníkové uspořádání binomických koeficientů bylo známo již dříve (trojúhelník byl již uveden v čínském matematickém traktátu z roku 1303), ale až jako „Pascalův trojúhelník" se rozšířilo mezi evropské matematiky.

S Pascalovým trojúhelníkem a jeho vlastnostmi jsou studenti seznamováni v rámci učiva kombinatoriky. Učitel by však měl dát studentům příležitost k tomu, aby jeho vlastnosti a následně jeho využití při řešení problémů objevili sami. Nové metody řešení problémů pomáhá objevovat heuristické uvažování. Jedním ze základních cílů vyučování matematiky by pak mělo být vést žáka k osvojení tohoto způsobu uvažování.

Mezi úlohy, které lze řešit heuristickým uvažováním patří ty úlohy, kde je nutno objevit skryté vazby mezi podmínkami úlohy, mezi danými, známými a neznámými prvky úlohy [1]. Bylo popsáno mnoho základních postupů, užitečných ve většině případů. V [5] nalezneme dělení řešitelských postupů na:

- Hledání zákonitostí
- Kreslení obrázků
- Formulace ekvivalentních problémů
- Modifikace problému
- Postup „odzadu“
- Zevšeobecnění

Podobně podle Kopky [4] patří k nejběžněji používaným heuristickým strategiím

- Přeformulování úlohy
- Analogie
- Zevšeobecňování
- Specializace
- Cesta zpět
- Systematické experimentování
- Konkretizace
- Zavedení pomocných prvků

V následujících předložených problémech se budeme zabývat otázkou nalezení všech dostupných cest v bludištích, resp. ve čtvercových, krychlových či jiných typech sítí. Problémy můžeme zařadit mezi heuristické.

Strategie řešení jednotlivých problémů se může lišit, avšak v řešení všech problémů se dá s výhodou využít Pascalova trojúhelníka. Při řešení problémů využíváme velmi často hasseovské diagramy [8], které umožňují lepší vhled do zadané situace. S objevováním vlastností Pascalova trojúhelníka je možno začít již na základní škole. Jednou z možností, jak vyřešit zadané problémy, je využití teorie grafů, resp. některých jejích metod [7], přestože tato teorie není součástí standardních osnov základní školy.

Transformace zadané situace do prostředí grafů však dobře umožňuje zákonitosti Pascalova trojúhelníka objevit. Jde nám především o vlastní objev skrytého modelu Pascalova trojúhelníka. Než uvedeme základní problém, připomeňme, co rozumíme Pascalovým trojúhelníkem.

Pro každé celé číslo $k$ a reálné číslo $x$ platí

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}$$

Z této definice binomických koeficientů plyne platnost následující rekurentní formule

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$$

Tato formule umožňuje postupně počítat hodnoty $\binom{n}{k}$. Tabulce těchto hodnot se obvykle říká Pascalův trojúhelník. V praxi využitelné schéma má pak obvykle tvar:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n = 0 & & & & & 1 & & & & \\
n = 1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n = 2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n = 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n = 4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

resp.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Prvky Pascalova trojúhelníka tvoří koeficienty u jednotlivých členů binomického rozvoje

$$
(x \pm y)^n = \tbinom{n}{0} x^n y^0 \pm \tbinom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \tbinom{n}{2} x^{n-2} y^2 \pm \tbinom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \dots + \\
+ (-1)^{n-1} \tbinom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + (-1)^n \tbinom{n}{n} x^0 y^n,
$$

resp.

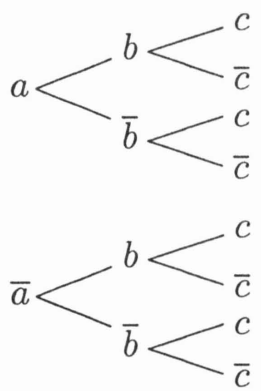
$$
(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad (x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{n}{k} x^{n-k} y^k
$$

## ZÁKLADNÍ PROBLÉM

### Hledání všech podmnožin dané množiny

*Hledejme počet všech podmnožin množiny* $\mathbf{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

***Řešení:*** Systematickým zápisem všech možných podmnožin získáme strom řešení. Přitom každý prvek buď je nebo není prvkem dané podmnožiny. Označme prvek, který není prvkem podmnožiny $\overline{a}$, resp. $\overline{b}$, $\overline{c}$. Strom řešení vypadá následovně:




Podmnožina

$S_1 = \{a, b, c\}$
$S_2 = \{a, b\}$
$S_3 = \{a, c\}$
$S_4 = \{a\}$
$S_5 = \{b, c\}$
$S_6 = \{b\}$
$S_7 = \{c\}$
$S_8 = \{\}$

Každá větev představuje konkrétní podmnožinu $S_i$, která je zapsána výčtem svých prvků vedle uvedeného stromu řešení. Je evidentní, že každým dalším prvkem, který zahrneme do stromu řešení, se počet větví zdvojnásobí.

V případě tříprvkové množiny získáváme tedy $2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3$ větví. Pro čtyřprvkovou podmnožinu podobně získáme 16 podmnožin, což odpovídá $2^4$. Tento počet je roven součtu prvků Pascalova trojúhelníka pro $n = 4$. Pro $n$-prvkovou množinu získáme $2^n$ podmnožin. Seřadíme-li nyní příslušné podmnožiny podle počtu prvků, získáme počet podmnožin o stejných počtech prvků jako členy Pascalova trojúhelníka.

Tyto úvahy mohou vést k důkazu celkového počtu všech podmnožin $S_i$ s $k$ prvky množiny $S$, která má $n$ prvků. Počet těchto podmnožin odpovídá vztahu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Uvedená rovnost vyplývá z binomické věty

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

kde $x = 1$ a $y = 1$.

O zmíněné metodě a dalších metodách, které se vztahují k uvedené problematice, je možné se více dočíst v [5].

## PROBLÉM 1

*Kolika různými způsoby při pohybu pouze dolů a doprava od písmene k písmeni je možné přečíst slovo OBRÁZEK (viz obr. 1)?*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O | B | R | Á | Z | E | K |
| B | R | Á | Z | E | K | |
| R | Á | Z | E | K | | |
| Á | Z | E | K | | | |
| Z | E | K | | | | |
| E | K | | | | | |
| K | | | | | | |

Obr. 1

***Řešení:*** Při čtení slova „*obrázek*“ můžeme postupovat pouze ve dvou směrech: dolů a doprava. Symbolicky můžeme tuto skutečnost znázornit pomocí šipek $\downarrow$, $\rightarrow$. Abychom se od počátečního písmene dostali k poslednímu, je nutno provést šest přesunů z výchozí pozice. Hledáme tedy počet všech podmnožin základní množiny o šesti prvcích, které jsou dány uvedenými směry postupu.

Dostaneme $2^6 = 64$ různých podmnožin, které odpovídají hledanému počtu, jak je možné přečíst slovo „*obrázek*“.

Zakreslíme nyní zjednodušený plán situace. Využijeme uzlového grafu, ve kterém vrcholy představují jednotlivá písmena (uzly grafu), jejich spojnice (hrany grafu) představují jednotlivé možnosti postupu čtení daného slova, viz obr. 1a. Ve vrcholech získané sítě je vepsán počet cest, vedoucích od startu do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán součtem cest, které vedou do předchozích písmen.

Sečteme-li všechny získané hodnoty u posledního písmene K, dostaneme celkový počet možností: $1+6+15+20+15+6+1 = 64$, tj. $2^6$ možností.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\rightarrow$ | | | | | | |
| $\downarrow$ | •1 | •1 | •1 | •1 | •1 | •1 | •1 |
| | •1 | •2 | •3 | •4 | •5 | •6 | |
| | •1 | •3 | •6 | •10 | •15 | | |
| | •1 | •4 | •10 | •20 | | | |
| | •1 | •5 | •15 | | | | |
| | •1 | •6 | | | | | |
| | •1 | | | | | | |

Obr. 1a

Uvedený problém je možno dále modifikovat a měnit slova či schémata, se kterými pracujeme. Uveďme některé z dalších možností, jejichž řešení ponecháme čtenáři:

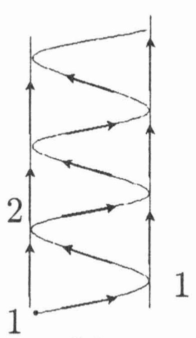
*Kolika různými způsoby při pohybu od písmene k písmeni je možné přečíst slovo KRUH, ČTVEREC, MAMINKA?*

```
      H
    H U H
  H U R U H
H U R K R U H
  H U R U H
    H U H
      H
```

```
A
K A
N K A
I N K A
M I N K A
A M I N K A
M A M I N K A
A M I N K A
M I N K A
I N K A
N K A
K A
A
```

```
            C
          C E C
        C E R E C
      C E R E R E C
    C E R E V E R E C
  C E R E V T V E R E C
C E R E V T C T V E R E C
            T V E R E C
            V E R E C
            E R E C
            R E C
            E C
            C
```

## PROBLÉM 2
### Hledání počtu cest od startu k cíli uvedené trasy

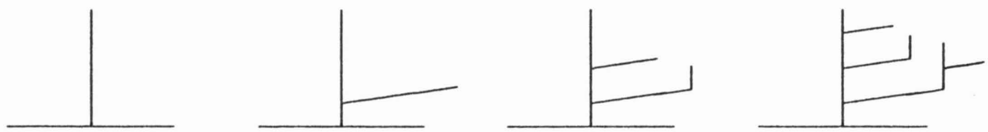



*Turisté stoupají do kopce. Na kopec vedou serpentiny – cesta se samými zatáčkami, doprava, doleva, pak zase doprava a zase doleva a tak dále (viz obr. 2). Z míst, v nichž se serpentiny ohýbají, můžeme na výstupu pokračovat i přímou cestou. Komu prudké stoupání nevadí, může si cestu občas zkrátit.*

Obr. 2: Schéma plánku

***Úkol:*** Ke každému bodu, ve kterém se cesty větví, napiš, kolika způsoby se tam turisté mohou dostat. Samozřejmě se přitom nebudou nikdy vracet, půjdou stále vzhůru, ve směru udaném některou ze šipek. Na první dvě rozhraní jsou již správná řešení napsána. Ke startu je připsána 1, protože nikde před startem nebylo rozcestí a dalo se tam dostat pouze jedinou cestou.

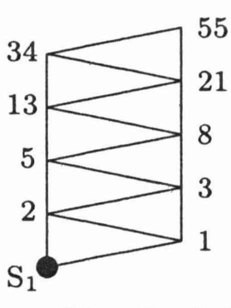
***Poznámka k řešení:*** Problém ukazuje při svém vyřešení na souvislost mezi čísly jako u Fibonacciho posloupnosti. Čísla na jednotlivých rozcestích, procházíme-li po daných cestách předloženého plánku, tvoří stejnou posloupnost, jako počty větví Fibonacciho stromu. Vždy následuje po dvou sousedních číslech jejich součet. Podivný strom Fibonacciho roste podle daného pravidla: vždy v příštím roce každá boční větev začne růst směrem vzhůru; z větví, které v předcházejícím (minulém) roce rostly směrem vzhůru, vyroste vždy v příštím roce nová boční větev. Princip narůstání ukazuje obr. 2a:



1. rok 2. rok 3. rok 4. rok

Obr. 2a: Počet větví Fibonacciho stromu

Počet větví v jednotlivých letech tvoří posloupnost: 1, 2, 3, 5, ... Pro naše potřeby budeme tuto posloupnost nazývat Fibonacciho posloupností – jde o Fibonacciho posloupnost, v níž vynecháváme první člen 1 a to z čistě praktického důvodu, neboť v konkrétních případech na hledání počtu cest vedoucích z daného místa do jiného přiřazujeme počátečnímu místu 1 (neexistuje více možností, jak se do vstupního místa dostat). Do konkrétního místa se pak můžeme dostat pouze přes nejbližší body, z nichž do tohoto místa vedou šipky (tj. dodržujeme povolený směr postupu).




***Řešení:*** Pro zjišťování čísla, které se připíše k dalšímu rozcestí, si můžeme pomoci jednoduchým překreslením plánku. Po připsání číselných hodnot, vyjadřujících počet možných cest, kterými se do daného místa dostaneme, získáme graf na obr. 2b.

Obr.2b: Překreslení plánku s řešením

***Odpověď:*** Až na vrchol stoupání existuje celkem 55 různých cest.

***Poznámka***: O využití grafů při řešení úloh je pojednáno např. v [6], [7]. Problémy 1 – 5 lze bez větších obtíží řešit již na základní škole. Hovoříme-li v dalším textu o žákovi, máme na mysli žáka ZŠ i studenta nižších ročníků gymnázií.

*Dokončení příště*