

Miroslav Macháček

S Cabri do tajů Lobačevského geometrie

*Učitel matematiky*, Vol. 16 (2008), No. 3, 160–170

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150652>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## S CABRI DO TAJŮ LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE

MIROSLAV MACHÁČEK

### Úvod

S eukleidovskou geometrií a jejími aplikacemi se každý z nás setkává každý den. Naproti tomu geometrie neeukleidovská je našemu vnímání stále takřka nekonečně vzdálená, ačkoliv snad již nikdo z matematiků nepochybuje o existenci více druhů geometrií.

V tomto příspěvku se budeme věnovat Lobačevského geometrii<sup>1</sup>, která je jedním speciálním případem neeukleidovské geometrie a jakýmsi zobecněním klasické eukleidovské geometrie. Zejména ukážeme, jak dnes již klasickým nástrojem dynamické geometrie Cabri můžeme sestavit prostředí jednoho z modelů Lobačevského geometrie. V tomto prostředí pak ukážeme některé vlastnosti objektů Lobačevského roviny<sup>2</sup>. Článek by jistě nebyl úplný bez krátkého uvedení historie Lobačevského geometrie, popisu Poincarého kruhového modelu Lobačevského roviny a závěrečného didaktického zamyšlení nad touto tematikou.

### Vznik Lobačevského geometrie

Vlastní vznik této nové geometrie na počátku 19. století je spjat se jmény Lobačevskij<sup>3</sup>, Gauss<sup>4</sup> a Bolyai<sup>5</sup>. Novému objevu však předcházelo více než dvoutisícileté úsilí matematiků dokázat pátý Eukleidův<sup>6</sup> postulát, který se týká rovnoběžnosti přímek. Tento postulát je obsažen v Eukleidově díle *Základy*, které je

<sup>1</sup>Lobačevského neeukleidovská geometrie bývá také nazývána *hyperbolická geometrie*.

<sup>2</sup>Lobačevského rovina bývá také nazývána *hyperbolickou rovinou*, kterou budeme značit  $H_2$ .

<sup>3</sup>Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856), ruský matematik.

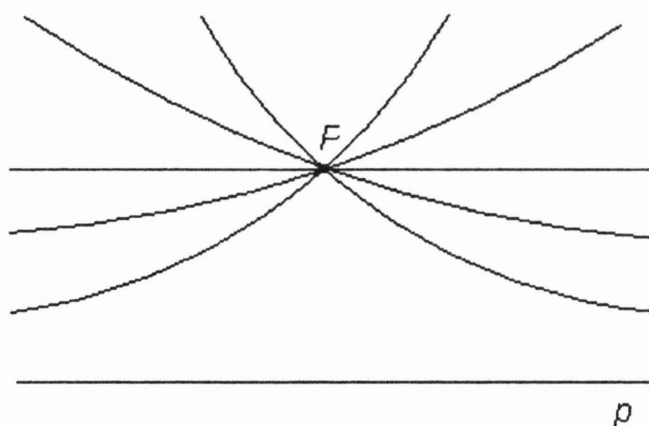
<sup>4</sup>Karl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik.

<sup>5</sup>János Bolyai (1802–1863), maďarský matematik.

<sup>6</sup>Eukleides z Alexandrie (? 340–280), řecký matematik.

nejvýznamnějším matematickým dílem starověku. Nakonec především právě Lobačevskij vystavěl základy nové geometrie založené na negaci axiomu rovnoběžnosti.

**Axiom Lobačevského geometrie:** *V rovině prochází bodem mimo přímku alespoň dvě různé s ní se neprotínající přímky.*



Obr. 1

Toto tvrzení se zdá být na první pohled nesmyslné, odporuje totiž klasickému eukleidovskému pojetí rovnoběžnosti, avšak z čistě matematického hlediska je geometrie vybudovaná na tomto základě bezesporná. Má tedy smysl vybudovat systém vět a definic platících v Lobačevského geometrii. Upozorníme ještě, že některé objekty (např. neeukleidovský ekvivalent kružnice) jsou definovány jiným způsobem než v geometrii eukleidovské. Definují se např. tzv. souběžky, což jsou hraniční přímky mezi různoběžkami a rozběžkami (viz níže).

## Poincarého<sup>7</sup> kruhový model Lobačevského roviny

Lobačevského geometrie byla zpočátku tvrdě odmítána jako nesmyslná teorie. Jedním z podnětů k přijetí této disciplíny matematickou veřejností bylo sestrojení eukleidovských modelů, ve kterých platí tvrzení této geometrie. Takový model můžeme v rovině sestrojít následujícím způsobem.

V běžné eukleidovské rovině zvolme kruh  $\Gamma$ . Rovinou  $\mathbf{H}_2$  budeme rozumět vnitřek kruhu  $\text{int}(\Gamma)$ . *P-body*<sup>8</sup> budou všechny body  $\text{int}(\Gamma)$ . *P-přímky* budou dvojího druhu:

- a) všechny průměry kruhu  $\Gamma$  bez krajních bodů,
- b) otevřené kruhové oblouky, které vzniknou jako průnik  $\text{int}(\Gamma)$  a eukleidovských kružnic, které ortogonálně protínají hraniční kružnici kruhu  $\Gamma$ .

Body hraniční kružnice budou *nevlastní body* roviny  $\mathbf{H}_2$ .

Důležité bude zavedení délky úsečky v  $\mathbf{H}_2$  a pojem shodnosti. **Definice:** *P-délku P-úsečky* v Poincarého kruhovém modelu definujeme vztahem

$$d_P(AB) = \left| \ln \left( \frac{|AP|}{|AQ|} \cdot \frac{|BQ|}{|BP|} \right) \right|,$$

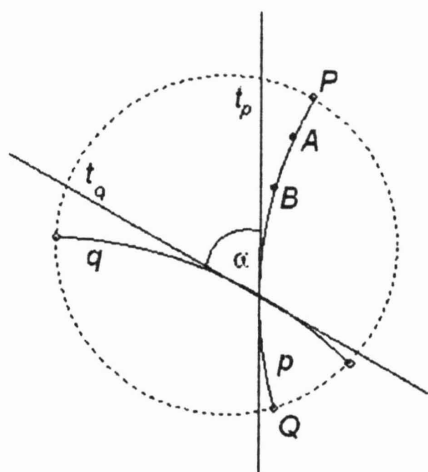
kde  $P, Q$  jsou krajní body oblouku nebo průměru, na němž leží úsečka  $AB$  a kde  $|AP|, |AQ|, |BQ|, |BP|$  jsou klasické eukleidovské vzdálenosti.

*P-úsečky* jsou pak *P-shodné*, jestliže mají stejnou *P-délku*. Dále platí:  $\lim_{A \rightarrow P} d_P(AB) = \infty$  a  $\lim_{B \rightarrow Q} d_P(AB) = \infty$ , tedy *P-délky* nabývají všech kladných reálných hodnot. *Shodnost úhlů* je analogická s eukleidovskou rovinou, tj. měřit *P-úhly* mezi dvěma *P-přímkami* znamená měřit eukleidovské úhly mezi dvěma tečnami k daným dvěma *P-přímkám* v jejich průsečíku (viz obr. 2).

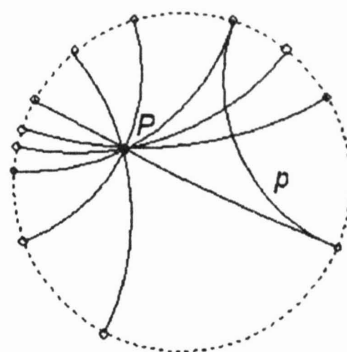
Jak je to s Lobačevského axiomem? Obr. 3 ukazuje, že bodem ležícím mimo danou přímku  $p$  může procházet více nerůznoběžek,

<sup>7</sup>Henri Poincaré (1854–1912), francouzský matematik.

<sup>8</sup>Body hyperbolické roviny znázorněné v Poincarého modelu.



Obr. 2



Obr. 3

z nichž dvě vykazují vůči přímce  $p$  asymptotickou vlastnost – tyto přímky jsou souběžky, ostatní nerůznoběžky jsou tzv. rozběžky a poslední skupinou přímek jsou klasické různoběžky.

Mohli bychom ukázat, že v tomto modelu platí ještě další axiomy hyperbolické geometrie, zaměříme se však nyní již na program Cabri Geometrie.

### Základní konstrukce v Poincarého kruhovém modelu Lobachevského roviny v Cabri

Nejprve v programu Cabri vytvoříme výše uvedený model roviny  $H_2$ , základní objekty budeme označovat jako  $P$ -přímky,  $P$ -úsečky,  $P$ -trojúhelníky,  $P$ -kružnice atd. Zároveň s konstruováním objektů budeme ukládat i tzv. makrokonstrukce, které „zautomatizují“ námi vytvořené konstrukce.

Základní konstrukce jsme rozdělili takto:

- sestrojení  $P$ -přímky procházející dvěma danými body
- sestrojení  $P$ -přímky spojující dva dané nevlastní body
- sestrojení  $P$ -úsečky s dvěma danými hraničními body
- sestrojení  $P$ -polopřímky s daným počátečním bodem a procházející dalším bodem

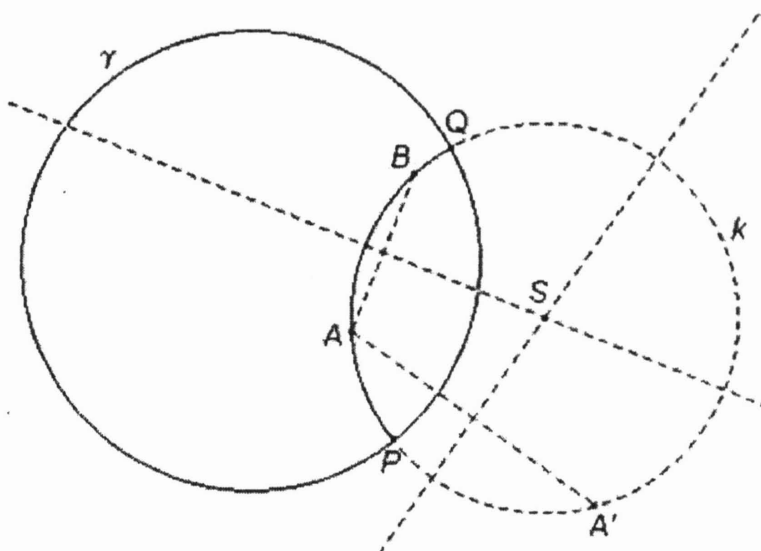
- sestrojení P-trojúhelníka se třemi danými vrcholy
- změření P-délky dané P-úsečky
- změření velikosti P-úhlu daného třemi body
- sestrojení P-kolmice na danou P-přímku
- sestrojení P-kružnice s daným středem a s daným P-poloměrem
- sestrojení P-kružnice s daným středem a daným bodem
- sestrojení P-osy dané P-úsečky
- sestrojení obrazu daného bodu v osově souměrnosti podle dané P-přímky

Pro ukázkou uvedeme tři úlohy. Klíčové bude často využití vlastností kruhové inverze související s ortogonalitou kružnic, které máme k dispozici.

**Příklad 1:** *Sestrojte P-přímku procházející dvěma danými body.*

Postupujeme tak, že sestrojíme kružnici procházející dvěma danými body  $A$ ,  $B$ , která ortogonálně protíná danou kružnici  $\gamma$ , jež je hraniční kružnicí roviny  $\mathbf{H}_2$ . (Body ovšem leží uvnitř dané kružnice.) Nejprve v kruhové inverzi podle kružnice  $\gamma$  zobrazíme jeden bod – např.  $A$ , neboť jeho obraz bude ležet na hledané kružnici. Sestrojíme úsečku  $AB$  a další úsečku  $AA$ ; obě jsou tětivy hledané kružnice. Nyní sestrojíme osy obou úseček; ty se protínají ve středu hledané kružnice. Sestrojíme kružnici  $k$  s tímto středem a procházející body  $A$ ,  $B$ . Průniky kružnic  $k$  a  $\gamma$  body  $P$ ,  $Q$  jsou krajní body kruhového oblouku, který sestrojíme a který opět prochází body  $A$ ,  $B$  – tím je P-přímka, která je otevřeným kruhovým obloukem, sestrojena. (Takovým „obloukem“ může být i úsečka v případě, že body  $A$ ,  $B$  leží na průměru kružnice  $\gamma$  – sestrojení P-přímky procházející takovými body je triviální.)

Nyní vytvoříme makrokonstrukci, která umožní předchozí konstrukci vytvářet automaticky. Vstupní objekty makra budou kružnice  $\gamma$  a dva body ležící uvnitř této kružnice, za výstupní objekty zvolíme kromě kruhového oblouku, jež je P-přímkou, i kružnici, která ho generuje.



Obr. 4

**Příklad 2:** Změřte  $P$ -délku dané  $P$ -úsečky.

Předpokládejme, že máme v tomto modelu dānu  $P$ -úsečku  $AB$  a chceme změřit její  $P$ -délku. Připomeňme vztah pro určení délky úsečky:

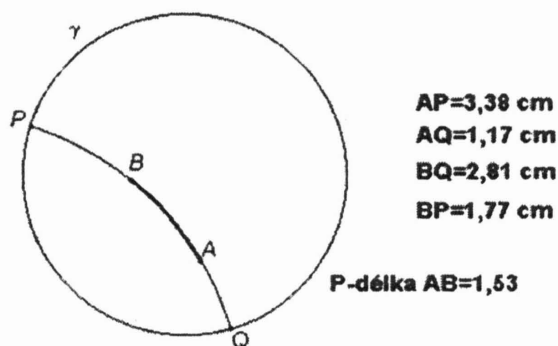
$$d_P(AB) = \left| \ln \left( \frac{|AP|}{|AQ|} \cdot \frac{|BQ|}{|BP|} \right) \right|,$$

Budeme potřebovat eukleidovské vzdálenosti  $|AP|$ ,  $|AQ|$ ,  $|BQ|$  a  $|BP|$ ; sestojíme tedy  $P$ -přímku  $AB$ , abychom zjistili polohu nevlastních bodů  $P$  a  $Q$ . Změříme nyní délku potřebných úseček a k určení  $d_P(AB)$  využijeme kalkulátor, do kterého vkládáme podle vzorce naměřená čísla; výsledek vyneseme z kalkulátoru na nákresnu (viz obr. 5).

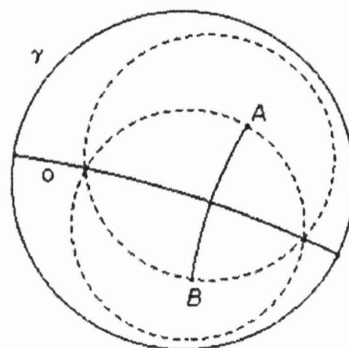
Makrokonstrukci vytvoříme tak, aby vstupních objektů bylo co nejméně, tedy pouze daná kružnice  $\gamma$  a dané dva krajní body úsečky, výstupní objekt bude číslo – výsledek, jenž jsme vynesli z kalkulátoru na nákresnu.

**Příklad 3:** Sestojte  $P$ -osu dané  $P$ -úsečky.

Předpokládejme, že již máme uloženou makrokonstrukci, kterou v této úloze budeme potřebovat. Nejprve sestojíme dvě



Obr. 5



Obr. 6

P-kružnice (množiny bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu), jejichž středem je jeden z krajních bodů úsečky a které prochází druhým krajním bodem. Kružnice se protínají ve dvou bodech – ty stačí spojit a úloha je vyřešena. (V úloze je patrná analogie s eukleidovskou konstrukcí osy úsečky, viz obr. 6.)

Jednoduše vytvoříme další makrokonstrukci. Vstupní objekty budou kružnice  $\gamma$  a dva body, které jsou krajními body P-úsečky, jejíž P-osu chceme sestrojít – ta bude výstupním objektem.

Vytvořením řady makrokonstrukcí jsme nyní sestrojili prostředí příslušného modelu Lobačevského roviny v programu Cabri. Upozorníme, že vždy jde o dynamické konstrukce, tzn. s objekty můžeme pohybovat, a níže tedy můžeme začít studovat vlastnosti některých objektů Lobačevského roviny.

### Vlastnosti objektů Lobačevského roviny prezentované v Cabri

Ve vytvořeném modelu bychom mohli ověřit např. tato tvrzení tzv. absolutní geometrie<sup>9</sup>:

- platnost trojúhelníkové nerovnosti
- v trojúhelníku leží proti větší straně větší úhel a proti většímu úhlu větší strana

<sup>9</sup>Geometrie založená na axiomech společných Eukleidov2 a Lobačevského geometrii.



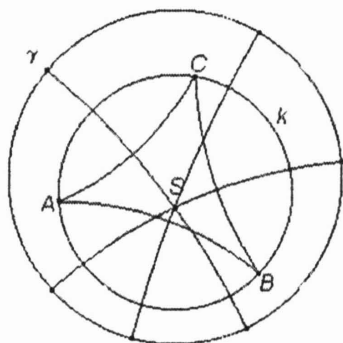
- osová souměrnost je shodné zobrazení aj.

Další vlastnost geometrie Lobačevského roviny můžeme prezentovat formou řešení úlohy.

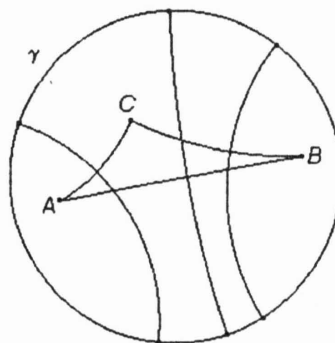
**Příklad 4:** *Ověřte platnost věty: Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě; je to střed kružnice opsané trojúhelníku.*

Pomocí makrokonstrukcí sestrojíme P-trojúhelník a osy jeho stran – mohly by se protínat v jednom bodě (obr. 7a). Sestrojíme P-kružnici s tímto středem, která prochází jedním z vrcholů P-trojúhelníka. Při pohybování vrcholy P-trojúhelníka je však patrné, že P-osy stran (eukleidovské kružnice) se nemusí protínat (viz obr. 7b); pokud se však protínají, pak v jednom bodě a pouze uvnitř kružnice  $\gamma$ . Osy stran zřejmě vytváří tři různé typy svazků při různých polohách vrcholů trojúhelníka – úloha vede k obecnějšímu termínu než je kružnice a tím je cyklus<sup>10</sup>. Tento příklad zakončíme Větou, kterou jsme de facto dokázali:

*V Lobačevského rovině existuje trojúhelník, jemuž nelze opsat kružnici.*



Obr. 7a



Obr. 7b

Podobně bychom mohli ukázat platnost těchto tvrzení:

- v Lobačevského rovině nemusí existovat ortocentrum trojúhelníka

<sup>10</sup>Definice cyklu je poměrně komplikovaná, není založena na středu a poloze kružnice.

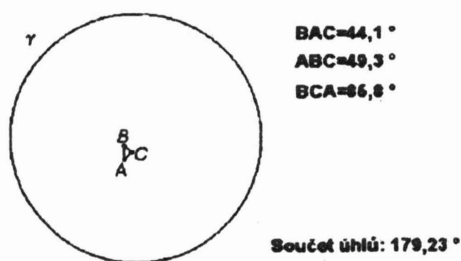
- neplatnost Thaletovy věty v Lobačevského rovině

Jde ovšem o tvrzení ekvivalentní s axiomem rovnoběžnosti, tudíž v rovině  $H_2$  nemohou platit. Další příklad se bude věnovat tvrzení vycházejícímu z negace axiomu rovnoběžnosti.

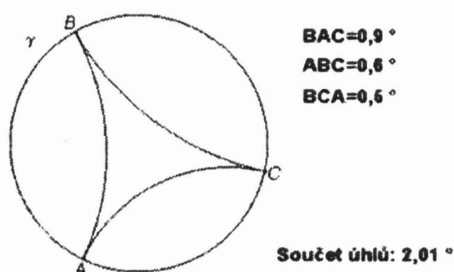
**Příklad 5:** *Ověřte platnost Věty: Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je vždy menší než  $2R$ .*

Stačí využít makro pro měření velikostí úhlů, vložit tyto tři naměřené hodnoty do kalkulátoru a sečíst je. Pohybujeme vrcholy P-trojúhelníka a přesvědčujeme se, že nerovnost platí. Zkusme navíc pohybovat vrcholy tak, aby byly všechny tři co nejbližší hranici Lobačevského roviny (tj. kružnici  $\gamma$ ) – pozorujeme, že součet velikostí vnitřních úhlů P-trojúhelníka je v tomto případě velmi malé číslo (blíží se  $0^\circ$ ) (obr. 8b). Pokud naopak přesuneme všechny tři vrcholy co nejbližší k sobě (obr. 8a), součet bude blízký  $180^\circ$ , ale dosáhne je až při nekonečně malých rozměrech P-trojúhelníka.<sup>11</sup> Ukázali jsme tak další vlastnost trojúhelníků v  $H_2$ :

*Čím jsou strany trojúhelníka větší, tím je součet jeho vnitřních úhlů menší.*



Obr. 8a



Obr. 8b

Dále bychom mohli „dokázat“ tato tvrzení v  $H_2$ :

- součet vnitřních úhlů v čtyřúhelníku je vždy menší než  $4R$
- rozběžky se od jejich společné kolmice od sebe nekonečně vzdalují

<sup>11</sup>Dostali bychom tak klasický eukleidovský trojúhelník; ukázka toho, že eukleidovská geometrie je geometrií „nekonečně malých čar“.

- souběžky se k sobě neomezeně blíží
- ekvidistantou přímky není přímka

Na závěr této kapitoly ještě ukážeme jednu vlastnost Lobačevského roviny.

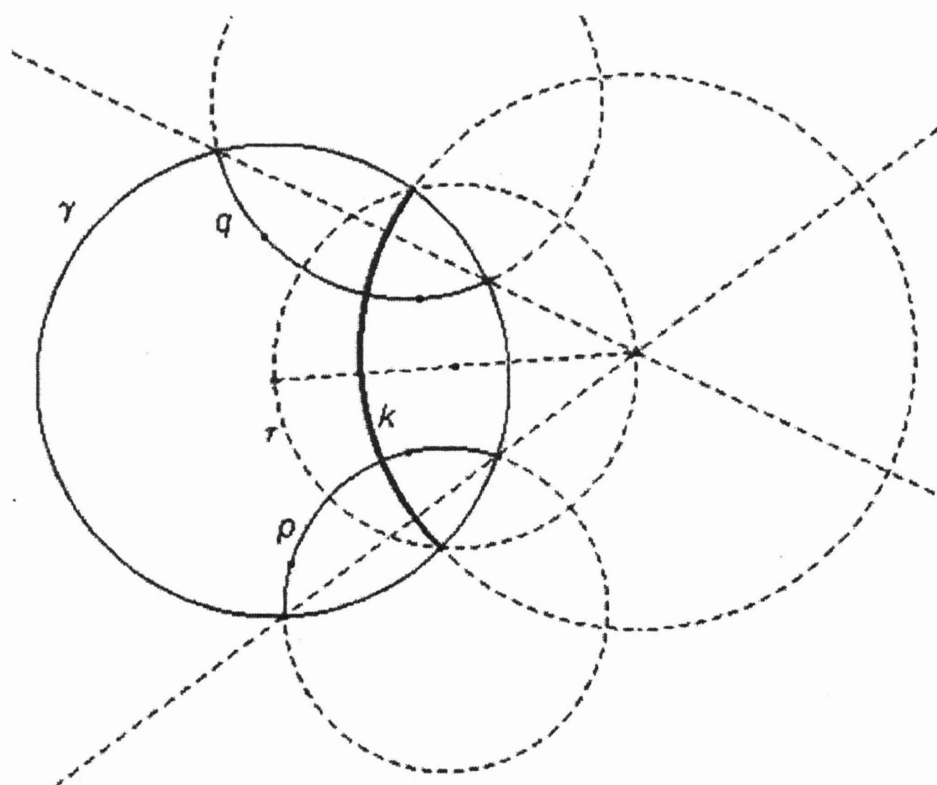
**Příklad 6:** *Dokažte, že v rovině  $H_2$  mají rozběžky jedinou společnou kolmici.*

Mějme tedy dány dvě rozběžky v rovině  $H_2$ . Sestrojit jejich kolmici znamená najít kružnici, jenž je kolmá k daným dvěma kružnicím a zároveň kolmá ke kružnici  $\gamma$ . Využijeme toho, že v kruhové inverzi jsou vzor, obraz a střed inverze kolineární, a zároveň využijeme ortogonality objektů, které máme k dispozici. Všimněme si, že dvojice průsečíků kružnic generující dané rozběžky s kružnicí  $\gamma$  leží zároveň na dvou kružnicích, které jsou vzhledem ke kruhové inverzi podle hledané kružnice samodružné – obě tyto dvojice musí tvořit vzor a obraz v této kruhové inverzi. Spojíme tedy nevlastní body vždy každé z rozběžek a průsečík těchto přímek nám dává střed hledané P-kolmice (eukleidovské kružnice); její sestavení je již rutinní záležitostí – znamená sestavit kružnici, jenž je ortogonální na kružnici  $\gamma$ , a jejíž střed známe. Dvě různé eukleidovské přímky mají nejvýše jeden průsečík, tzn. hledaná eukleidovská kružnice bude také jedna, tedy dvě rozběžky mají právě jednu společnou kolmici.

Ještě zdůrazněme, že od této úlohy již není daleko k určení vzdálenosti dvou P-přímek.

## Závěr

Neeukleidovská geometrie má své místo ve vysokoškolské výuce matematiky. Jde o didakticky poměrně náročnou tematiku, neboť souvisí s axiomatickou výstavbou geometrie a zde studenti často nemají „na čem stavět“, neboť na nižších úrovních škol axiomatika nebývá probírána. Největší potíží bývá pochopit, že velká část geometrie není postavena na eukleidovském axiomu rovnoběžnosti, který mají studenti empiricky „zažitý“ jako jeden ze základních kamenů geometrie.



Obr. 9

Rozvoj praxe a vědy však ukázal, že eukleidovská geometrie je pouze prvním přiblížením v poznání geometrických vlastností skutečného prostoru. Ukázalo se, že dalším přiblížením ve vyšetřování skutečného prostoru je geometrie neeukleidovská, např. Lobačevského geometrie.

Rádi bychom, aby tento článek přispěl k tomu, aby čtenář, popř. uživatel programu Cabri lépe poznal Lobačevského neeukleidovskou geometrii a mohl v co největší míře využít možnosti tohoto programu při konstrukcích v modelech této geometrie.

*RNDr. Miroslav Macháček*  
*Magistrů 5/384*  
*140 00 Praha 4 – Michle*  
*e-mail: mmachac@centrum.cz*