Milada Kočandrlová

Od obsahu čtverce k determinantu druhého řádu

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 2, 74–83

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150643`

OD OBSAHU ČTVERCE K DETERMINANTU DRUHÉHO ŘÁDU

MILADA KOČANDRLOVÁ

1. Úvod

Každý z nás se jistě setkal s definicí determinantu (např. [1]):

$$det A = \sum_{\{p\}} (sign\, p) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n},$$

tj. součtem součinů prvků a_{ij} čtvercové matice přes všechny permutace $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ indexů $1, 2, \dots, n$, kde $sign\, p$ je znaménko permutace p. Rozepisovat součet vpravo pro velká n není šťastné. Z takto definovaného determinantu se také odvozují jeho vlastnosti a hledá se jejich geometrický význam. My budeme postupovat právě obráceně, od geometrického významu k výpočtu, determinantu 2. řádu, ale také 3. řádu. Postup lze použít na střední škole jak v souvislosti s obsahem rovnoběžníka určeného dvojicí vektorů, tak s objemem rovnoběžnostěnu, který je určen trojicí vektorů. Připomeneme proto nejprve (viz [2]) vlastnosti vektorů, které budeme dále potřebovat.

2. O vektorech

Nenulovým vektorem $\mathbf{u}$ rozumíme množinu všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr. Každou takovou úsečku nazveme umístěním vektoru $\mathbf{u}$. Všechny nulové úsečky tvoří nulový vektor. Dvě různé orientované úsečky určují stejný vektor, dostaneme-li jednu z druhé posunutím. Říkáme, že nenulový vektor $\mathbf{u}$ leží na přímce p, je-li každé jeho umístění s přímkou p rovnoběžné. Velikost vektoru je délka jeho umístění.

Mějme uspořádanou dvojici nenulových vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, které jsou určené orientovanými úsečkami PA, PB se společným počátečním bodem P a neleží na jedné přímce. Uspořádanou dvojici $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ nazveme pravotočivou, položíme-li pravou ruku hranou na rovinu ABP a prsty ruky nám ukazují směr otáčení polopřímky PA do polopřímky PB (o konvexní úhel). Analogicky zavedeme levotočivou uspořádanou dvojici vektorů. O každé uspořádané dvojici vektorů (vektory nejsou rovnoběžné s jednou přímkou) tak můžeme rozhodnout zda je pravotočivá nebo levotočivá. Dostáváme dvě třídy uspořádaných dvojic vektorů.

Zřejmě platí:

- Je-li dvojice $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ pravotočivá, je dvojice $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$ levotočivá.

- Je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ pravotočivá dvojice, jsou dvojice $(k\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $(\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2)$ pro $k > 0$ pravotočivé a pro $k < 0$ levotočivé. Podobně pro levotočivou dvojici vektorů.

V rovině pracujeme v kartézské soustavě souřadnic, která je určena pravotočivou uspořádanou dvojicí (jednotkových a kolmých) orientovaných úseček – vektorů. Takovou soustavu souřadnic nazýváme pravotočivou. Souřadnice přiřazujeme jak bodům, tak vektorům.

2.1. Skalární součin vektorů

Každým dvěma vektorům $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ můžeme přiřadit číslo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

které nazýváme skalární součin vektorů. Z vlastností reálných čísel je zřejmé, že pro skalární součin vektorů platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\\
(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} &= c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{o} &= 0\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2,
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{o}$ je nulový vektor a $|\mathbf{u}|$ je velikost vektoru $\mathbf{u}$.

Máme-li v rovině dva nenulové vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$, můžeme zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že $\mathbf{u} = (|\mathbf{u}|, 0)$ a $\mathbf{v} = (|\mathbf{v}|\cos\varphi, |\mathbf{v}|\sin\varphi)$. Pak

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\varphi.$$

Úhel $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$, definovaný touto rovností, nazýváme úhel vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Jsou-li vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ kolmé, pak $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Analogicky zavedeme skalární součin pro vektory v prostoru. Vlastnosti i geometrický význam jsou stejné jako u vektorů v rovině.

3. Vnější součin vektorů

Uspořádané dvojici vektorů přiřadíme nyní číslo se zřejmým geometrickým významem, které nazveme *vnější součin*. Je-li $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ uspořádaná dvojice nenulových vektorů, sestrojíme rovnoběžník $ABCD$ tak, že $B - A = \mathbf{u}$ a $D - A = \mathbf{v}$. Obsah tohoto rovnoběžníka označíme $S(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Ve speciálním případě může rovnoběžník přejít v úsečku. Pak $S(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$. Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, je $S(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$.

Vnější součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je číslo

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \begin{cases} S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{je – li } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ pravotočivá uspořádaná dvojice vektorů,} \\ -S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{je – li } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ levotočivá uspořádaná dvojice vektorů,} \\ 0 & \text{leží – li vektory } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ na jedné přímce.} \end{cases}$$

Snadno se přesvědčíme, že pro takto definovaný vnější součin platí:

V1. Je-li uspořádaná dvojice $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pravotočivá a oba vektory jsou jednotkové a kolmé, pak $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1$. Vektory určují strany jednotkového čtverce.

V2. $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$

V3. $[\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}'] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] + [\mathbf{u}, \mathbf{v}']$

V4. $[\mathbf{u}, k\mathbf{v}] = k[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$

4. Determinant 2. řádu

Uvažujeme vektory $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12})$ a $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22})$. **Determinantem (2. řádu)** nazýváme číslo (vnější součin) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ a značíme ho

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Protože jsme determinant definovali pomocí vnějšího součinu vektorů, platí pro řádky determinantu stejná tvrzení jako platila pro vektory ve vnějším součinu. Podle toho pro determinant $|\mathbf{A}|$ podle V3 platí

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11}, & 0 \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & 0 \\ 0, & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & 0 \\ a_{21}, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & a_{12} \\ a_{21}, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & a_{12} \\ 0, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Následující dva determinanty mají buď aspoň jeden řádek nulový nebo vektory obou řádků leží na jedné přímce. Proto

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & 0 \\ a_{21}, & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0, & a_{12} \\ 0, & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Potom podle V4 je

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}.$$

Podle vlastností V1 a V2 je determinant 2. řádu číslo

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Je zřejmé, že zapíšeme-li vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ do sloupců, tj. $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix}$, hodnota determinantu se nezmění. Tudíž to, co vyslovíme o řádcích determinantu, platí i pro jeho sloupce.

Důsledky vlastností V1 až V4 vnějšího součinu pro determinanty:

1. Determinant s jednotkovými a kolmými řádky (sloupci), které tvoří pravotočivou uspořádanou dvojici vektorů, je roven 1.

2. Zaměníme-li v determinantu řádky (sloupce), změní determinant znaménko.

3. Vynásobíme-li řádek (sloupec) determinantu reálným číslem α, změní determinant hodnotu α krát, např.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11}, & \alpha a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & \alpha a_{12} \\ a_{21}, & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Dále platí:

4. Je-li jeden řádek (sloupec) determinantu nulový vektor, je determinant roven nule.
5. Je-li jeden řádek (sloupec) determinantu násobkem druhého řádku, je determinant roven nule.
6. Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) násobek řádku (sloupce) druhého.

5. Některá použití determinantu

Z definice determinantu je zřejmé, že jej můžeme využít k výpočtu obsahu trojúhelníka, známe-li souřadnice jeho vrcholů.

5.1. Obsah trojúhelníka

Jsou-li body $A[3,0]$, $B[-1,2]$, $C[2,3]$ vrcholy trojúhelníka ABC, určují např. vektory $\mathbf{u} = B - A = (-4,2)$ a $\mathbf{v} = C - A = (-1,3)$. Potom obsah $\mathbf{S}$ trojúhelníka ABC je roven polovině z absolutní hodnoty determinantu

$$\begin{vmatrix} -4, & 2 \\ -1, & 3 \end{vmatrix},$$

tj. polovina z obsahu rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Tedy

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}|-12+2| = 5\,.$$

Determinanty můžeme využít k řešení soustavy dvou lineárních rovnic. Vzorce pro výpočet kořenů, které nazýváme Cramerovo pravidlo, si odvodíme.

5.2. Cramerovo pravidlo

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

pro dvě neznámé x, y eliminační metodou. Nejdříve z rovnic vyloučíme neznámou y (první rovnici násobíme a_{22}, druhou $-a_{12}$ a obě rovnice sečteme) a potom analogicky pro neznámou x . Dostaneme

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x &= b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y &= b_2a_{11} - b_1a_{21}\,. \end{aligned}$$

Jestliže $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, je řešení dané soustavy jediné a

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Všechny výrazy v obou zlomcích zapíšeme pomocí determinantů

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Cramerovo pravidlo použijeme v následujících dvou aplikacích, a to pro definici vektorového součinu dvou vektorů a pro lineární regresi.

5.3. Vektorový součin vektorů

Mějme dány dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (v prostoru) a hledejme vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, který je na oba vektory kolmý. Z odstavce 2.1 víme, že skalární součin dvou kolmých vektorů je roven nule. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic pro tři neznámé souřadnice hledaného vektoru

$$\begin{aligned} u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 &= 0, \\ v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Budeme se zabývat případem, kdy oba vektory jsou nenulové a neleží na jedné přímce. Vektorů, které jsou k oběma daným vektorům kolmé je nekonečně mnoho a jejich souřadnice budou záviset na jednom parametru. Předpokládejme, že $u_1v_2 - v_1u_2 \neq 0$, zvolme za tento parametr w_3 a přepišme předcházející rovnice na tvar

$$\begin{aligned} u_1w_1 + u_2w_2 &= -u_3w_3, \\ v_1w_1 + v_2w_2 &= -v_3w_3. \end{aligned}$$

Cramerovým pravidlem vypočítáme první dvě souřadnice w_1 a w_2 v závislosti na souřadnici w_3

$$w_1 = \frac{\begin{vmatrix} -u_3w_3, & u_2 \\ -v_3w_3, & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}}, \quad w_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_1, & -u_3w_3 \\ v_1, & -v_3w_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}}.$$

Využijeme vlastností determinantů a oba výrazy upravíme

$$w_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_3, & u_2 \\ v_3, & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}}(-w_3), \quad w_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}}(-w_3).$$

Zvolíme-li $w_3 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}$, nazýváme vektor

$$\mathbf{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

vektorový součin vektorů u a **v**, který zapisujeme $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Jeho vlastnosti lze snadno vyvodit z vlastností determinantů.

5.4. Lineární regrese

V praxi, např. při vyhodnocování dat, se setkáme s následující situací. Získali jsme data měřením veličiny y v závislosti na čase x, která určují v rovině n bodů $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$. Hledáme lineární funkci $y = kx+q$, která by charakterizovala „co nejlépe“ naměřené hodnoty. Pro názornost uvažujme $n = 3$. Jednoduchým kriteriem co nejlepší charakteristiky je součet

$$s = (y_1 - (kx_1 + q))^2 + (y_2 - (kx_2 + q))^2 + (y_3 - (kx_3 + q))^2$$

čtverců rozdílů naměřených hodnot y_i a hodnot $y_i' = kx_i + q$ hledané lineární funkce v bodech x_i, kde k a q jsou neznámé. Lineární funkce bude nejlepší, bude-li číslo s nejmenší.

Na součet s můžeme pohlížet jako na čtverec velikosti rozdílu dvou vektorů

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3), \quad \mathbf{y}' = (kx_1 + q, kx_2 + q, kx_3 + q).$$

Přitom vektor $\mathbf{y}'$ můžeme zapsat jako součet dvou vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{e} = (1, 1, 1)$, tj.

$$\mathbf{y}' = k\mathbf{x} + q\mathbf{e}.$$

Vektor $\mathbf{y} - \mathbf{y}'$ bude mít minimální velikost, právě když bude kolmý na rovinu určenou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{e}$, a tedy kolmý na oba vektory. Protože kolmé vektory mají nulový skalární součin, dostáváme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - (k\mathbf{x} + q\mathbf{e})) \cdot \mathbf{x} &= 0, \\ (\mathbf{y} - (k\mathbf{x} + q\mathbf{e})) \cdot \mathbf{e} &= 0, \end{aligned}$$

pro neznámé k, q. V rovnicích rozepíšeme skalární součiny a upravíme

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) + q(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \\ k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) + q(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Použitím Carmerova pravidla dostaneme pro koeficienty v rovnici hledané přímky

$$k = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{xy}, & \mathbf{xe} \\ \mathbf{ey}, & \mathbf{ee} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{xx}, & \mathbf{xe} \\ \mathbf{xe}, & \mathbf{ee} \end{vmatrix}}, \quad q = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{xx}, & \mathbf{xy} \\ \mathbf{ex}, & \mathbf{ye} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{xx}, & \mathbf{xe} \\ \mathbf{xe}, & \mathbf{ee} \end{vmatrix}}.$$

Rozšíříme-li skalární součin na uspořádané n-tice

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n,$$

nalezené vztahy pro k, q zůstavají v platnosti a úlohu můžeme řešit pro libovolný počet naměřených hodnot (bodů) v rovině.

Lineární regresi budeme ilustrovat příkladem dat, která jsme získali měřením roztažnosti cínu v teplotním intervalu od 20° do 70° C,

t° C	22.4	28.6	37,7	49	66.4
r cm	32	40.3	46.4	59	76

Pro neznámé k, q dostáváme

$$k = \frac{\begin{vmatrix} 11556.06, & 204.1 \\ 253.7, & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9550.97, & 204.1 \\ 204.1, & 5 \end{vmatrix}} = 0.983944021$$

$$q = \frac{\begin{vmatrix} 9550.97, & 11556.06 \\ 204.1, & 253.7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9550.97, & 204.1 \\ 204.1, & 5 \end{vmatrix}} = 10.57540504.$$

Literatura

[1] Sedláček, J., a kolektiv, *Slovník školské matematiky*, SPN, Praha, 1981

[2] Boček, L., Kočandrle, M., *Analytická geometrie*, Prometheus, 1995

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT,
Thákurova 7
166 29 Praha 6
e-mail: Milada.Kocandrlova@fsv.cvut.cz