Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 4, 242–255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150632`

kvalitní, klidnou školu. O dobrých školách se nebude psát v tisku, nebudou mít úžasně atraktivní nabídku, budou mít potíže, protože poctivou prací a péčí o žáky budou rodičům dělat starosti. Vím, že je to nerovný zápas. Ale pozor. Je to zápas o vlastní lidskou hodnotu, o čest a také o děti, které jsou bezbrannou kořistí všeobsáhlé lži, ve které vesele žijeme.

Děkuji vám za pozornost a přeji vám vytrvalost a sílu. Sílu k přijetí pravdy, vytrvalost při její obhajobě.

★ ★ ★

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 9. – 12. 3. 2008 se v Českých Budějovicích uskutečnilo celostátní kolo 57. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C pro školní rok 2008–2009.

Úlohy celostátního kola 57. ročníku matematické olympiády

České Budějovice 9. – 12. března 2008

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$(x^3 - y^3) - (x^2 - y^2) + (x - y) = 0,$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0.$$

Druhý činitel je kladný pro jakákoliv reálná čísla x a y, neboť

$$x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = \tfrac{1}{2}(x + y)^2 + \tfrac{1}{2}(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2}(y - 1)^2$$

a základy všech tří druhých mocnin nemohou být rovny nule současně. Proto pro každé řešení (x, y) dané soustavy musí platit $x - y = 0$ neboli $y = x$, což redukuje soustavu na jedinou rovnici $x + x^2 = x^3$ s kořeny $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Řešeními jsou právě tři dvojice (x, y), kde $y = x \in \{0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}$.

Jiné řešení. Vyjádření $y = x^3 - x^2$ z druhé rovnice dosadíme do rovnice první. Dostaneme rovnici $x + (x^3 - x^2)^2 = (x^3 - x^2)^3$, po úpravě

$$x^9 - 3x^8 + 3x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - x = 0.$$

To je sice rovnice 9. stupně, ale pomůže nám taková úvaha: případu $x = y$ odpovídá jediná rovnice $x + x^2 = x^3$, proto získaný mnohočlen stupně 9 *musí být dělitelný* mnohočlenem $x^3 - x^2 - x$. Vydělením přejdeme k rovnici v součinovém tvaru

$$(x^3 - x^2 - x)(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1) = 0.$$

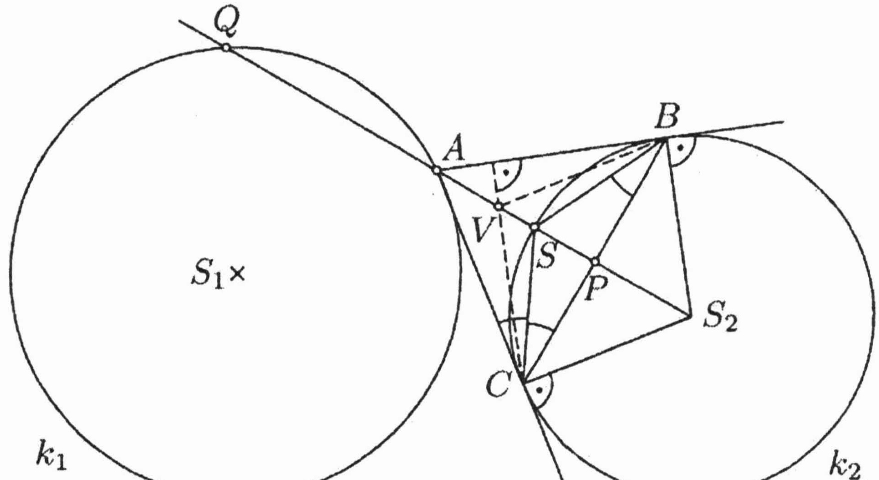
Druhý činitel je však kladný pro jakékoliv reálné číslo x, neboť

$$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2)^2 + (x^2 - x)^2 + (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}.$$

První složka x každého řešení (x, y) proto musí splňovat rovnici $x^3 - x^2 - x = 0$. Zbytek řešení je nasnadě.

Jiné řešení. Ještě jedním způsobem dokážeme, že $x = y$. Připusťme, že existuje řešení s vlastností $x > y$ (opačný případ je symetrický). Pak z rovností $x = y^3 - y^2$ a $y = x^3 - x^2$ plyne $y^3 - y^2 > y$ a $x^3 - x^2 < x$, tedy $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$, kde P je polynom $P(x) = x^3 - x^2 - x$ s rozkladem $P(x) = x(x - x_2)(x - x_3)$, přitom $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 0$ a $x_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0$. Nerovnosti $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$ znamenají, že platí $y \in (x_3, 0) \cup (x_2, \infty)$ a $x \in (-\infty, x_3) \cup (0, x_2)$, což s ohledem na $x > y$ lze upřesnit na $y \in (x_3, 0)$ a $x \in (0, x_2)$. Přímo z $y < 0$ ovšem plyne nerovnost $y^3 - y^2 < 0$, tedy $x < 0$, což je ve sporu s tím, že $x \in (0, x_2)$.

2. Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem A na kružnici k_1 a vrcholy B, C na kružnici k_2 zvolenými tak, že obě přímky AB, AC jsou tečnami kružnice k_2. Najděte
a) množinu středů kružnic vepsaných,
b) množinu průsečíků výšek
všech takových trojúhelníků ABC. *Tomáš Jurík*



Obr. 1

Řešení. a) Bod A může být na kružnici k_1 vybrán *libovolně*, body B a C jsou pak nutně body dotyku obou polopřímek s počátkem A, které jsou tečné ke kružnici k_2 (obr. 1). Vzhledem k jejich symetrii je ABC rovnoramenný trojúhelník souměrný podle přímky AS_2. Středem kružnice jemu vepsané je průsečík S úsečky AS_2 s kružnicí k_2. Tento bod S totiž leží nejen na ose úhlu

BAC, ale také na osách obou (souměrně sdružených) úhlů ABC a ACB, protože podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle CBS|$ a ze symetrie $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCS|$. Obráceně, zvolíme-li na kružnici k_2 libovolně bod S tak, aby polopřímka S_2S protťala kružnici k_1 v aspoň jednom bodě, který označíme A a ke kterému sestrojíme podle první věty řešení vyhovující trojúhelník ABC, bude podle předchozích úvah bod S středem kružnice vepsané právě takovému trojúhelníku ABC. Hledanou množinou je tedy množina průsečíků kružnice k_2 se všemi úsečkami S_2A, kde bod A probíhá celou kružnici k_1. Je to zřejmě kratší z obou oblouků (včetně krajních bodů) kružnice k_2, které na ní vytínají obě polopřímky s počátkem S_2, jež se dotýkají kružnice k_1.

b) Dokážeme, že hledanou množinou je kružnice, která je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti se středem S_2 a kladným koeficientem

$$\lambda = \frac{2r_2^2}{|S_1S_2|^2 - r_1^2}.$$

Vysvětlíme totiž, proč ortocentrum V každého uvažovaného trojúhelníku ABC, jež z důvodu osové souměrnosti leží na polopřímce S_2A (díky ostrým úhlům ABC, ACB leží body A, V ve stejné polorovině s hranicí BC), je ve zmíněné stejnolehlosti obrazem druhého průsečíku Q polopřímky S_2A s kružnicí k_1, který — stejně jako první průsečík A — probíhá celou kružnici k_1 (v případě, kdy se polopřímka S_2A dotýká kružnice k_1, klademe $Q = A$). Potřebný vztah $|S_2V| : |S_2Q| = \lambda$ dostaneme vydělením rovností

$$|S_2A| \cdot |S_2Q| = |S_1S_2|^2 - r_1^2 \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A| = r_2^2,$$

které nyní zdůvodníme (a tak bude celý důkaz hotov).

První rovnost vyjadřuje (kladnou) mocnost bodu S_2 ke kružnici k_1. Druhá rovnost plyne z Eukleidovy věty o odvěsně S_2B pravoúhlého trojúhelníku S_2BA, protože střed P úsečky BC je nejen patou výšky z vrcholu A, ale také středem kosočtverce CS_2BV, tudíž

$$r_2^2 = |S_2B|^2 = |S_2P| \cdot |S_2A| = \tfrac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A|.$$

3. Zjistěte, pro která celá kladná čísla a, b je hodnota podílu

$$\frac{b^2 + ab + a + b - 1}{a^2 + ab + 1}$$

rovna celému číslu. *Martin Panák*

Řešení. Ukážeme, že všechny vyhovující dvojice (a, b) jsou tvaru $(1, b)$, kde b je libovolné celé kladné číslo.

Označme $X = a^2 + ab + 1 = a(a + b) + 1$ a $Y = b^2 + ab + a + b - 1 = (b + 1)(a + b) - 1$. Dělí-li číslo X číslo Y, dělí i číslo

$$(b+1)X - aY = (b+1)[a(a+b)+1] - a[(b+1)(a+b)-1] = a+b+1,$$

které tudíž jako kladný násobek čísla X splňuje nerovnost

$$a + b + 1 \geq X = a^2 + ab + 1.$$

Odtud po zrušení jednotek a dělení číslem $a + b$ dostaneme $1 \geq a$, tedy nutně $a = 1$.

Naopak, je-li $a = 1$, je $X = b + 2$ a $Y = b^2 + 2b = b(b + 2)$, takže $X \mid Y$ platí.

4. Rovnost

$$2\,008 = 1\,111 + 666 + 99 + 88 + 44$$

je rozkladem čísla 2 008 na součet několika navzájem různých vícemístných čísel, z nichž každé je zapsáno stejnými číslicemi. Najděte

a) aspoň jeden takový rozklad čísla 8 002,

b) všechny takové rozklady čísla 8 002, které mají co nejmenší počet sčítanců (na jejich pořadí nebereme zřetel).

Jaromír Šimša

Řešení. a) Příkladem hledaného rozkladu je rovnost

$$8\,002 = 3\,333 + 999 + 888 + 777 + 666 + 555 + 333 + 99 + 88 + 77 + 66 + 55 + 44 + 22.$$

V druhé části ukážeme, že je to jediný vyhovující rozklad čísla 2 008 na 14 sčítanců a že žádný takový rozklad na menší počet sčítanců neexistuje.

b) Číslo tvaru $\overline{aaaa}$, resp. $\overline{aaa}$, resp. $\overline{aa}$ je a-násobkem čísla 1 111, resp. 111, resp. 11. Proto každý uvažovaný rozklad čísla 8 002 můžeme po částečném sečtení („stejnomístných" sčítanců) zapsat ve tvaru

$$8\,002 = 1\,111k + 111l + 11m,$$

kde k, l, m jsou celá nezáporná čísla nepřevyšující hodnotu součtu $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ (neboť sčítaná „stejnomístná" čísla mají být navzájem různá).

Uvedenou rovnost přepíšeme do tvaru

$$8\,002 = 727 \cdot 11 + 5 = 11(101k + 10l + m) + l,$$

$$727 = 101k + 10l + m + \frac{l-5}{11}.$$

Odtud vychází (s ohledem na $l \leq 45$), že $l = 11q + 5$, kde $q \in$ $\in \{0, 1, 2, 3\}$. Dostáváme tak rovnost

$$677 = 101 \cdot 6 + 71 = 101(k + q) + 10q + m,$$

z níž zřejmě plyne $k + q = 6$ a $10q + m = 71$. Tato soustava má za daných podmínek jediné řešení $q = 3$, $k = 3$ a $m = 41$. Pro l tak vychází $l = 38$.

K vytvoření hledaného rozkladu zbývá rozložit nalezená čísla k, l, m na součet jednoho či několika různých jednomístných sčítanců. Vzhledem k tomu, že na výběr máme právě devět sčítanců $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ se součtem 45, bude zřejmě jednodušší vypsat rozklady pro k, $45 - l$ a $45 - m$ (rozklady čísel l a m pak dostaneme vynecháním nalezených sčítanců ze součtu $1 + 2 + \cdots + 9$):

$$k = 3 = 1 + 2,$$

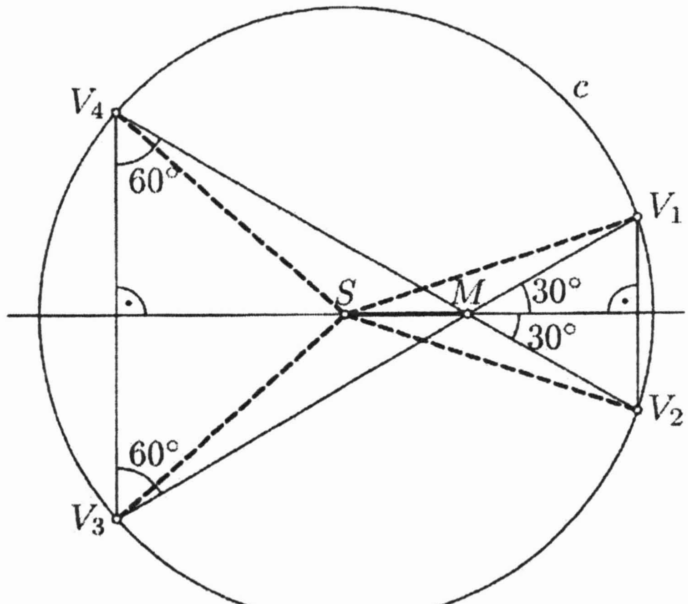
$$45 - l = 7 = 1 + 6 = 1 + 2 + 4 = 2 + 5 = 3 + 4,$$

$$45 - m = 4 = 1 + 3.$$

Našli jsme všech $2 \cdot 5 \cdot 2$ možných rozkladů čísla 8 002, jež mají požadované vlastnosti a z nichž každý má alespoň $1 + 6 + 7 = 14$ sčítanců, přičemž rozklad na 14 sčítanců je jediný a byl uveden v řešení části a).

5. Karel v jistý okamžik na svých přesně jdoucích hodinkách zjistil, že konec velké ručičky, konec malé ručičky a vhodný bod na kružnici ciferníku tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Než tento jev nastal podruhé, uplynula doba t. Najděte největší možné t pro dané hodinky v závislosti na poměru k délek obou ručiček ($k > 1$), když poloměr kružnice ciferníku je shodný s délkou velké ručičky. *Jaromír Šimša*

Řešení. Ukážeme, že hledané největší t je rovno $4/11$ hod nezávisle na poměru k délek ručiček. Označme c kružnici ciferníku, S



Obr. 2

její střed a M konec malé ručičky (obr. 2). Vysvětlíme nejprve, proč při pevné poloze bodu M existují právě dva rovnostranné trojúhelníky MXY s vrcholy X, Y na kružnici c. Protože přímka

SM musí být osou tětivy XY, a tedy i osou úhlu XMY, svírají obě přímky MX, MY s přímkou SM úhel 30°. Proto je trojúhelník MXY totožný s jedním z rovnostranných trojúhelníků MV_1V_2, MV_3V_4 sestrojených na obr. 2.

Body V_i rozdělují kružnici c na čtyři oblouky. Obloukům V_2V_3 a V_4V_1 příslušejí obvodové úhly $V_2V_4V_3$, $V_1V_3V_4$ velikosti 60°. Proto podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí první dvě z rovností

$$|\sphericalangle V_2SV_3| = |\sphericalangle V_4SV_1| = 120^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle V_1SV_2| + |\sphericalangle V_3SV_4| = 120^\circ,$$

třetí rovnost je jejich důsledkem (dopočítáním podle plného úhlu u vrcholu S). Plyne z ní, že oba středové úhly V_1SV_2, V_3SV_4 jsou menší než 120°.

Můžeme si představit, že malá ručička hodinek je nehybná a velká ručička se kolem středu S otáčí úhlovou rychlostí $(360 - - 30)^\circ = 330^\circ$ za hodinu. Jak jsme zjistili, zkoumaný jev nastane, právě když konec V velké ručičky splyne s jedním ze čtyř bodů V_i. Mezi dvěma po sobě jdoucími jevy se proto velká ručička otočí o úhel, který má ve dvou případech velikost 120° a ve zbylých dvou případech velikosti $|\sphericalangle V_1SV_2|$ a $|\sphericalangle V_3SV_4|$, které jsou menší než 120° (a závisí na poměru k). Nejdelší doba t je tedy na poměru k nezávislá a je rovna $120/330\,\text{hod}$.

6. Určete největší reálné číslo p a nejmenší reálné číslo q, pro něž nerovnosti

$$p < \frac{a + t_b}{b + t_a} < q$$

platí v libovolném trojúhelníku ABC se stranami a, b a těžnicemi t_a, t_b. *Pavel Novotný*

Řešení. Ukážeme, že hledaná čísla jsou $p = 1/4$ a $q = 4$. Stačí pouze zdůvodnit, že $q = 4$ (pak totiž $p = 1/4$, neboť záměna stran a, b mění hodnotu zkoumaného zlomku na převrácené číslo).

Podle trojúhelníkových nerovností platí

$$\tfrac{1}{2}a < b + t_a \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{3}t_b < \tfrac{2}{3}t_a + \tfrac{1}{2}b.$$

První nerovnost vynásobíme dvěma, druhou třemi a pak je sečteme:

$$a + t_b < (2b + 2t_a) + \left(2t_a + \tfrac{3}{2}b\right) = \tfrac{7}{2}b + 4t_a < 4(b + t_a).$$

Požadovanou vlastnost má tedy každé číslo $q \geq 4$; ukážeme ještě, že ji nemá žádné číslo $q < 4$. K tomu uvážíme rovnoramenný trojúhelník ABC, ve kterém $a = c = 1$ a $b \in (0, 2)$ (takový trojúhelník existuje pro libovolné b z uvedeného intervalu). Z obecných vzorců

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

dostaneme $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2b^2}$ a $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{4 - b^2}$, odkud

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} = \frac{2 + \sqrt{4 - b^2}}{2b + \sqrt{1 + 2b^2}}.$$

Poslední zlomek může být pro malé kladné b libovolně blízký číslu 4. Vysvětlíme to takto: zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak pro všechna dostatečně malá kladná b současně platí

$$\sqrt{4 - b^2} > 2 - \varepsilon, \quad 2b < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sqrt{1 + 2b^2} < 1 + \varepsilon,$$

takže

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} > \frac{4 - \epsilon}{1 + 2\epsilon},$$

a je snadné vybrat $\varepsilon > 0$ tak, aby byl poslední zlomek větší než jakékoliv předem zvolené q menší než 4. Stačí, aby platilo

$$\varepsilon < \frac{4 - q}{1 + 2q}.$$

Výsledková listina celostátního kola 57. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	Josef Tkadlec	7/8 GJK Praha 6, Parléřova	**42**
2.	Miroslav Klimoš	3/4 GMK Bílovec	**33**
3.	David Klaška	2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**30**
4.	Alena Peterová	8/8 G Dobruška, Pulická	**26**
5.–7.	Van Nhan Nguyen	7/8 G Praha 6, Nad Alejí	**24**
	Samuel Říha	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**24**
	Jakub Töpfer	7/8 GJK Praha 6, Parléřova	**24**
8.	Van Minh Nguyen	5/6 G Tachov, Pionýrská	**23**
9.–11.	Tomáš Hřebejk	8/8 G Praha 4, Písnická	**22**
	Jan Matějka	7/8 G České Budějovice, Jírovcova	**22**
	Alena Skálová	6/6 G Praha 4, Na Vítězné Pláni	**22**

Další úspěšní řešitelé:

12.–13.	Petr Fiala	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**21**
	Tomáš Pavlík	7/8 GJK Praha 6, Parléřova	**21**
14.	Jiří Marek	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**20**
15.–16.	Hana Šormová	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**19**
	Jan Vaňhara	7/8 GLJ Holešov, Palackého	**19**
17.–18.	Libor Máca	8/8 G Třebíč, Masarykovo nám.	**18**
	Libor Petlan	8/8 G České Budějovice, Česká	**18**
19.–20.	Jakub Menšík	4/4 G Třebíč, Masarykovo nám.	**17**
	Marek Nečada	8/8 G Jihlava, Jana Masaryka	**17**
21.–22.	Alexander Slávik	7/8 G Brno, Terezy Novákové	**16**
	Martin Výška	7/8 G Praha 6, Nad Alejí	**16**
23.	Jiří Vančura	3/4 SPŠ ST Praha 1, Panská	**15**
24.	Martin Michálek	4/4 GJKT Hradec Králové	**14**

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2008–2009

Kategorie A

A-I-1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2\sin x\cos(x+y)+\sin y=1,$$
$$2\sin y\cos(y+x)+\sin x=1.$$

Jaroslav Švrček

A-I-2. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelník-u ABC s průsečíkem výšek trojúhelník-u ABD je rovnoběžná s přímkou CD. *Tomáš Jurík*

A-I-3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo. *Ján Mazák*

A-I-4. Uvažujme nekonečnou aritmetickou posloupnost

$$a, a+d, a+2d, \dots, \qquad (*)$$

kde a, d jsou přirozená (tj. kladná celá) čísla.

a) Najděte příklad posloupnosti (∗), která obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel pro všechna $k = 2, 3, \dots$

b) Najděte příklad posloupnosti (∗), která neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla pro žádné $k = 2, 3, \dots$

c) Najděte příklad posloupnosti (∗), která neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla, ale obsahuje nekonečně mnoho třetích mocnin přirozených čísel.

d) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Posloupnost (∗) buď neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla, anebo obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel. *Jaroslav Zhouf*

A-I-5. V každém vrcholu pravidelného 2008úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:
a) na 8 hromádek po 251 minci,
b) na 251 hromádek po 8 mincích. *Radek Horenský*

A-I-6. Je dán trojúhelník- ABC. Uvnitř stran AC, BC jsou dány body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M střed strany AB a P průsečík přímek AD a BE. Dokažte, že obraz bodu P v středové souměrnosti se středem M leží na ose úhlu ACB. *Ján Mazák*

KATEGORIE B

B-I-1. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli. *Peter Novotný*

B-I-2. Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

B-I-3. Na straně BC, resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE, AEF a AFD měly stejné obsahy.

Jaroslav Zhouf

B-I-4. Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.

Ján Mazák

B-I-5. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa strany AB protne kružnici k v bodě K, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Osy stran AC a BC protnou přímku CK po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné.

Leo Boček

B-I-6. Najděte všechny dvojice celých čísel (m,n), pro něž je hodnota výrazu

$$\frac{m+3n-1}{mn+2n-m-2}$$

celé kladné číslo.

Vojtech Bálint

KATEGORIE C

C-I-1. Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz?

Peter Novotný

C-I-2. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC.

Pavel Leischner

C-I-3. Najděte všechna čtyřmístná čísla n, která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla n jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo n je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n, je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi.

Pavel Novotný

C-I-4. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na polopřímce BC sestrojte takový bod G, aby obsah trojúhelníku ABG byl shodný s obsahem daného pětiúhelníku. *Lucie Růžičková*

C-I-5. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.)

Jaromír Šimša

C-I-6. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Jaromír Šimša