Milan Koman

Teorie grafů, Möbiův list a logo KMDM PeDF UK

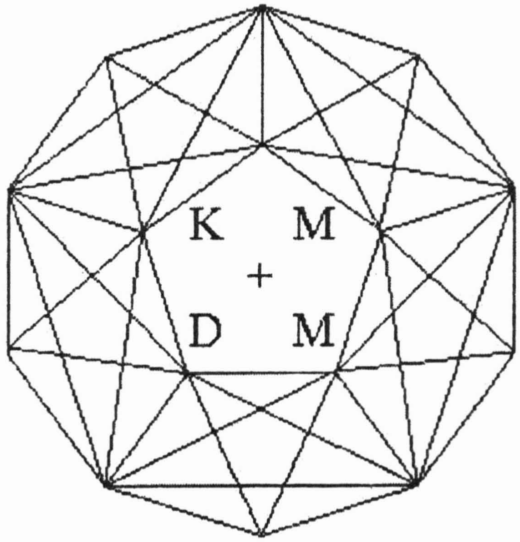
Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 4, 197–208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150629`

TEORIE GRAFŮ, MÖBIŮV LIST A LOGO KMDM PEDF UK

MILAN KOMAN

Nápad vytvořit logo katedry matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty UK vznikl v roce 1992. Moje představa byla navrhnout takové logo, které by kromě zajímavého grafického a estetického ztvárnění mělo i své matematické jádro. Při hledání loga jsem se nechal inspirovat svými pracemi ze šedesátých a sedmdesátých letech minulého století věnovaných studiu průsečíkových čísel grafů. Výsledkem bylo logo (obr. 1) často označované pracovníky katedry jako „desetiúhelník". V dalším uvedu, jaké hlubší matematické jádro se skrývá pod tímto „desetiúhelníkem".

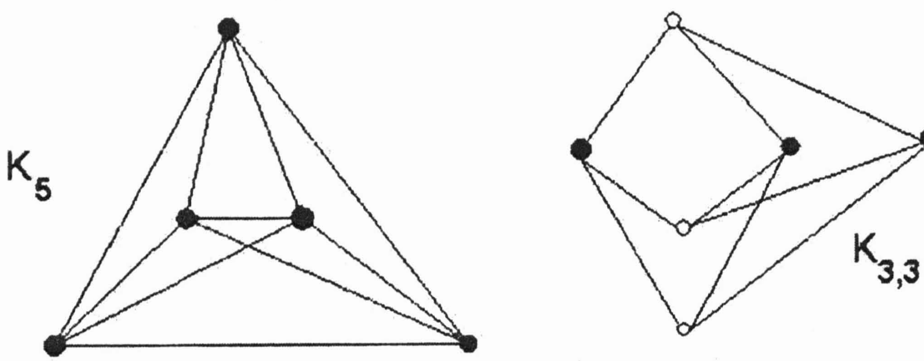


Obr. 1

Předem si připomeňme pojem průsečíkového čísla. **Průsečíkovým číslem** $cr(G)$ grafu G pro danou topologickou plochu Σ

(např. pro eukleidovskou rovinu, anuloid, projektivní rovinu, Kleinovu láhev, atd.) rozumíme číslo udávající nejmenší možný počet průsečíků hran grafu G při jeho vnoření do plochy Σ (tj. při nakreslení na ploše Σ).

Například *úplný graf* K_5 a *úplný sudý graf* $K_{3,3}$ (známý jako graf znázorňující úlohu „o třech domech a třech studních") mají podle Kuratowského[1] věty z roku 1930 pro eukleidovskou rovinu průsečíkové číslo rovné 1. Jinými slovy kresby obou těchto grafů mají v eukleidovské rovině (obr. 2a,b) vždy nejméně jeden průsečík hran.



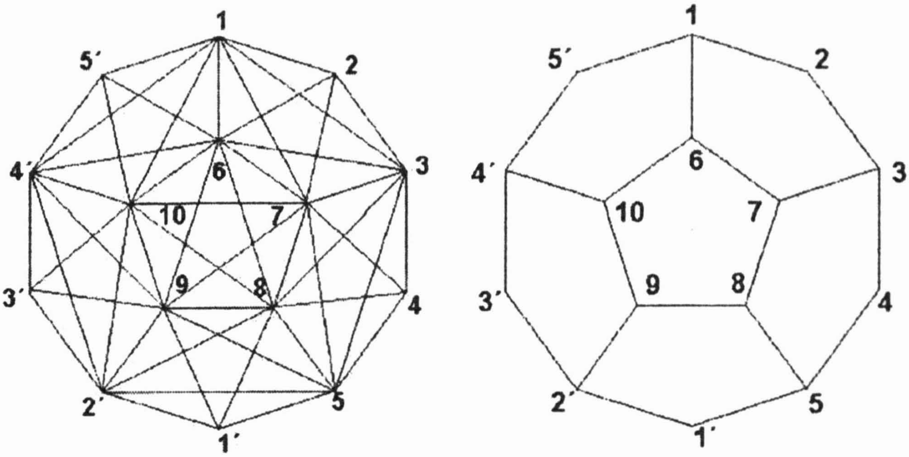
Obr. 2a,b

Ve svých pracích jsem studoval průsečíková čísla úplných grafů K_n na třech plochách, na eukleidovské rovině (spolu s J. Blažkem, [1]) a na projektivní rovině a na Kleinově láhvi [2]. Mojí inspirací pro logo katedry matematiky a didaktiky matematiky byl obrázek 3a, obsažený v citované práci [2].

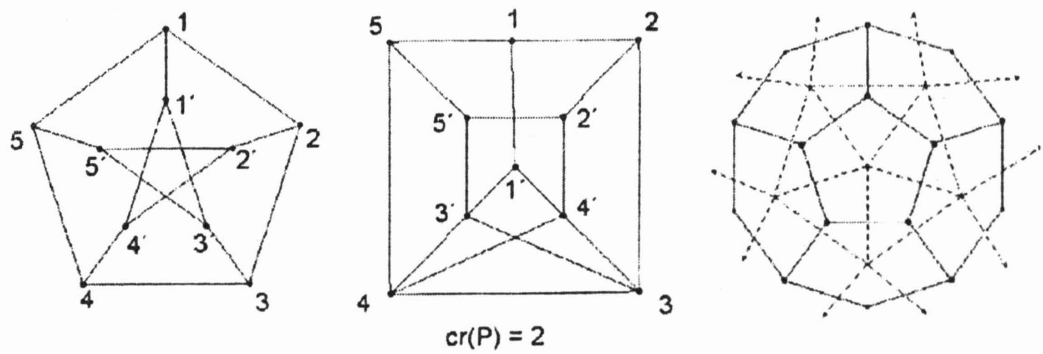
Ten ukazuje vnoření úplného grafu K_{10} do projektivní roviny, která vznikne tak, že ztotožníme dvojice protějších vrcholů pravidelného desetiúhelníku $U_{10} = 123451'2'3'4'5'$. Přitom ztotožníme i protilehlé strany desetiúhelníku U_{10}.

Obrázek 3a ilustruje skutečnost, že průsečíkové číslo grafu K_{10} pro projektivní rovinu je rovno 30 (tj. graf K_{10} má v projektivní rovině aspoň 30 průsečíků). (Viz Koman [2]).Vynecháme-li v obrázku 3a všechny protínající se hrany, vznikne obrázek 3b, který

[1]Polský matematik *Kazimierz Kuratowski* (1896–1980)



Obr. 3a,b



Obr. 4a,b,c

ukazuje, že v projektivní rovině lze pravidelný graf P_{10} třetího stupně s deseti uzly a se šesti pětiúhelníkovými oblastmi nakreslit bez průsečíků. Může překvapit, že graf P_{10} (známý *Petersenův graf* – viz obr. 4a), je možné nakreslit v projektivní rovině (viz obrázek 4b) bez průsečíků. Obrázek 4b však naznačuje, že průsečíkové číslo Petersenova grafu v eukleidovské rovině je rovné 2, zatímco v projektivní rovině (viz obr. 4b) je rovné 0.

V projektivní rovině je duálním grafem[2] k Petersenovu grafu

[2]Duální graf ke grafu na obrázku 3b sestrojíme takto: Graf na obr. 3b se skládá z šesti pětiúhelníků. Každý z nich sousedí jednou hranou se všemi zbývajícími pětiúhelníky. V každém zvolíme jeden vrchol hledaného duálního

úplný graf K_6[3] (obr. 4c, jeho hrany jsou vyznačeny čárkovaně). Tento graf je sestrojen v projektivní rovině bez průsečíků hran a proto je jeho průsečíkové číslo v projektivní rovině rovné nule.

Vraťme se ještě na okamžik k pojmu **projektivní rovina**. Rozumíme jí uzavřenou „jednostrannou" (tj. **neorientovatelnou**) plochu bez okraje, která má **eukleidovskou charakteristiku** $e_p = 1$.

V našem případě určíme hodnotu eukleidovské charakteristiky projektivní roviny snadno pomocí kresby Petersenova grafu (obr. 3b). Počet jeho uzlů $u = 10$, počet jeho hran je $h = 15$ a počet pětiúhelníkových oblastí, na které dělí tuto rovinu je $o = 6$. Pro tyto hodnoty platí

$$u - h + o = 1.$$

Eukleidovská charakteristika e_p projektivní roviny je rovna pravé straně této rovnosti, tj. $e_p = 1$. Zbývá ukázat, že jde o jednostrannou plochu. To ukážeme v dalším.

Podíváme-li se znovu na obrázek 3a znázorňující graf K_{10}, asi si dost těžko představíme, jak můžeme v praxi modelovat slepení protějších vrcholů a protějších stran pravidelného desetiúhelníku $U_{10} = 123451'2'3'4'5'$ tak, aby vznikla projektivní rovina.

Ukážeme si, jak lze tento problém aspoň částečně řešit. Pro lepší názornost zvýrazníme na obrázku 3a jeho hrany tvořící pětiúhelníky a obarvíme prostřední pětiúhelník (obr. 5a). Pak jej spojitou deformaci postupně přeměníme na obdélníkový pás (obr. 5b,c).

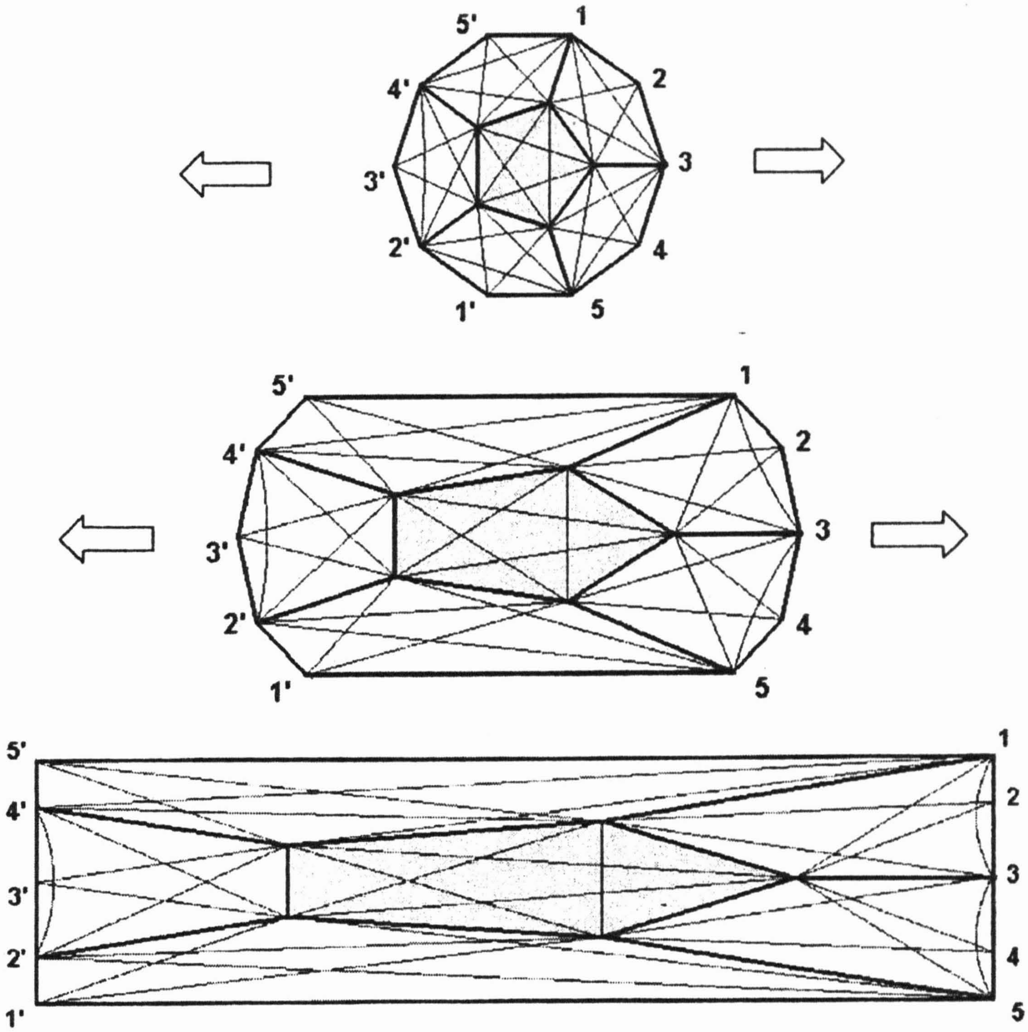
Nakonec obdélníkový pás z obrázku 5c slepíme do tvaru **Möbiova listu**[4] (obr. 6). Slepíme odpovídající vrcholy a úsečky na svislých stranách obdélníku. Dostaneme jednostrannou plochu. Po tomto slepení zbylé dvě vodorovné (neslepené) strany vytvoří jedinou uzavřenou čáru („deformovanou" kružnici).

---

grafu. Jeho vrcholy spojíme hranou, právě když leží v sousedních pětiúhelnících.

[3] http://mathworld.wolfram.com/RealProjectivePlane.html

[4] Möebiův list objevili v roce 1858 na sobě nezávisle dva němečtí matematici *August Ferdinand Möbius* (1790–1858) a *Johann Benedict Listing* (1808–1882).

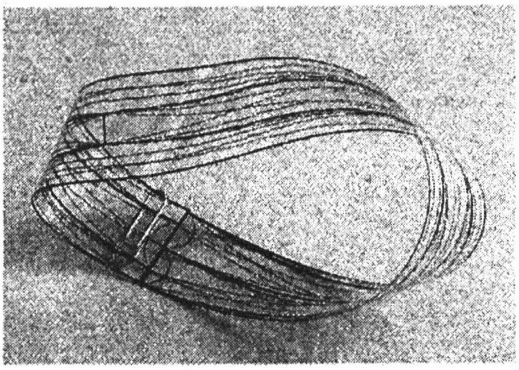


Obr. 5a,b,c

Ze sestrojeného Möbiova listu vznikne projektivní rovina zalepením jeho okraje kruhovou plochou (resp. plochou, která je homeomorfní s kruhem.)

Můžeme shrnout:

Logo katedry matematiky je modelem projektivní roviny, do které je vnořen úplný graf K_{10}, jehož pět „vnitřních" hran je překryto textem „KM + DM". Jde o vnoření úplného grafu K_{10} do projektivní roviny s *minimálním*

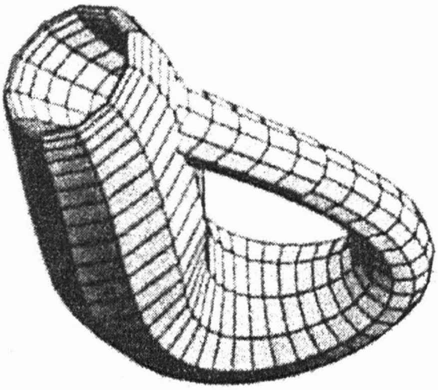


Obr. 6

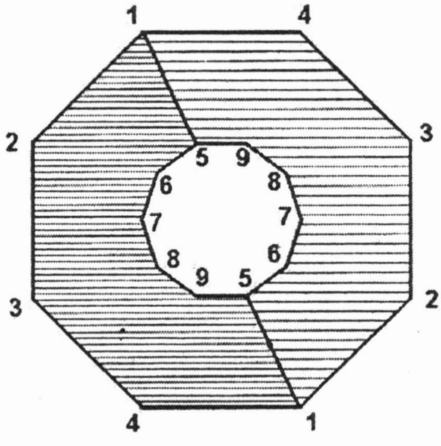
počtem průsečíků hran **rovným číslu 30.**

Pro srovnání připomeňme, v eukleidovské rovině má tento graf nejméně 60 průsečíků.

★ ★ ★



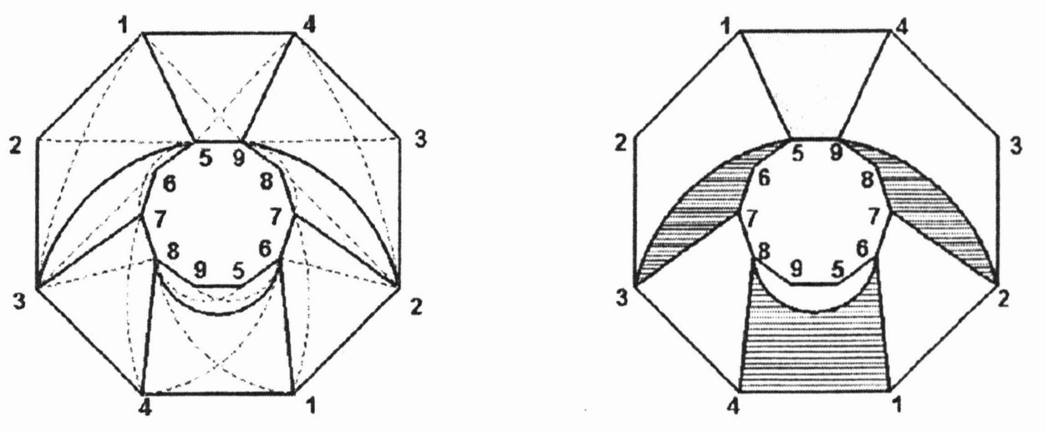
Obr. 7



Obr. 8

Ve zbylé části si ukážeme, že Möbiův list je užitečný i při studiu *Kleinovy láhve*[5]. Nejznámější model Kleinovy láhve je na obrázku 7 (viz též [4]). Můžeme si představit, že tento model vznikne ze zužující se „hadice“. Jejím tenčím koncem „propíchneme“ hadici poblíž tlustého konce a protáhneme dále. Pak tenký konec roztáhneme a slepíme s tlustším koncem původní hadice.

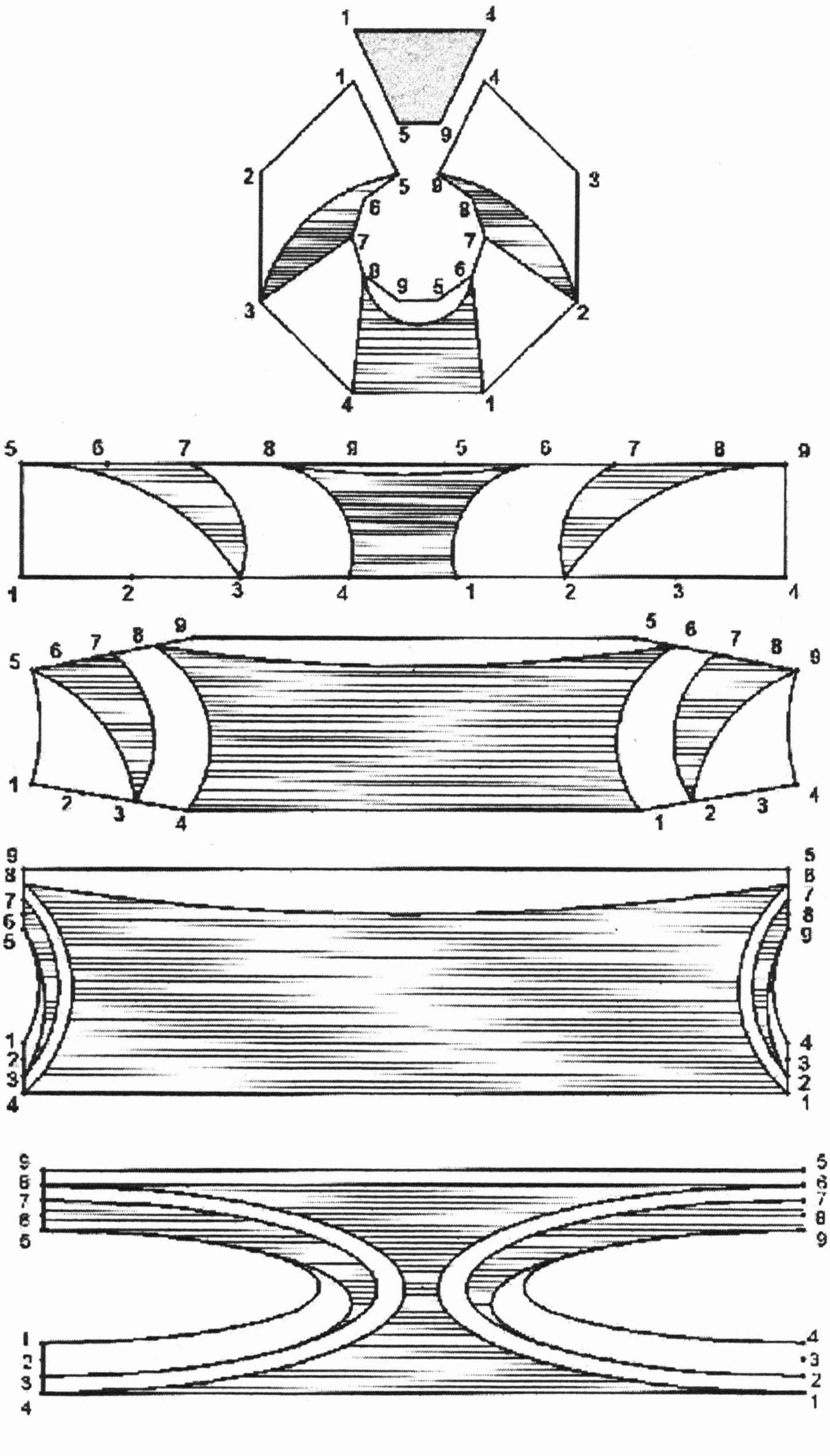
Kleinovu láhev však můžeme sestrojit i jinými způsoby. Jiný model je na obrázku 8 a byl použit v práci [2]. Skládá se ze dvou různě šrafovaných mnohoúhelníků na obr. 8. Kleinova láhev pak vznikne z tohoto obrázku slepením dvojic stejně očíslovaných vrcholů, jednak „vnějšího“ osmiúhelníku a jednak „vnitřního“ desetiúhelníku. Vlastní slepení provedeme postupně, podobně jako v případě projektivní roviny, když jsme pravidelný desetiúhelník z obrázku 5a transformovali na Möbiův list z obrázku 5c.



Obr. 9a,b

Než k tomuto slepení přikročíme, ukážeme si, že Kleinova láhev má eukleidovskou charakteristikou rovnou 0. Je tedy (jak jsme už poznali dříve) o 1 menší než eukleidovská charakteristika projektivní roviny, která je rovna 1. Můžeme se o tom přesvědčit pomocí grafu na obrázku 8. Počet jeho uzlů je $u = 9$, počet jeho hran je $h = 11$ a počet jeho oblastí (dva různě šrafované mnohoúhelníky)

[5]Kleinova láhev byla poprvé popsána v roce 1882 německým matematikem *Felixem Kleinem* (1849–1925).



Obr. 10a,b,c,d,e

je $o = 2$. Pro tyto hodnoty platí

$$u - h + o = 9 - 11 + 2 = 0,$$

což dokazuje, že eukleidovská charakteristika e_K Kleinovy láhve je skutečně rovna 0.

Nyní přistoupíme k postupné úpravě obrázku 8. Nejdříve na něm dokreslíme úplný graf K_9, který bude mít minimální počet průsečíků a to devět. Dostaneme obrázek 9a. Hrany bez průsečíků jsou na něm nakresleny plně, hrany s průsečíky čárkovaně. Můžeme se přesvědčit, že průsečíků je skutečně 9.

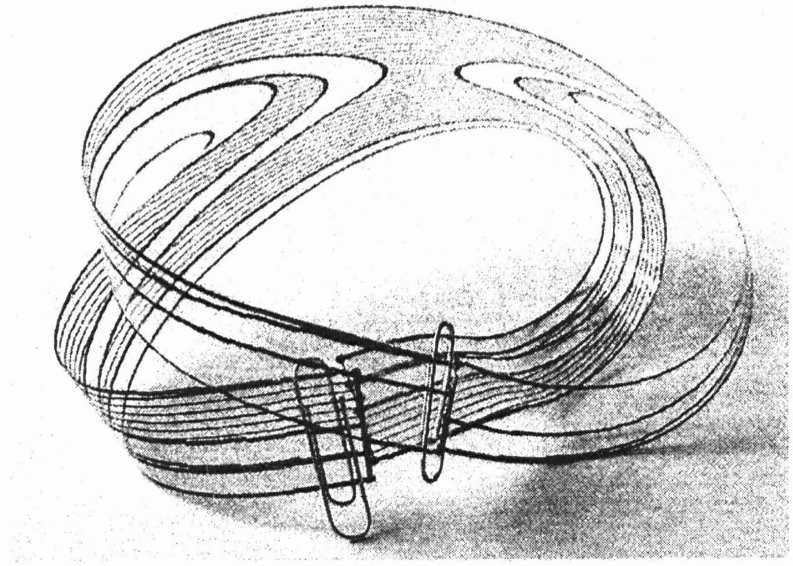
Nyní, stejně jako v případě projektivní roviny vynecháme všechny hrany, na kterých leží průsečíky. Dostaneme obrázek 9b, který představuje vnoření pravidelného grafu G čtvrtého stupně (z každého uzlu vycházejí právě 4 hrany) s devíti uzly a devíti čtyřúhelníkovými oblastmi (z nich 3 jsou šrafovány a 1 je obarvena šedivou barvou).

Jako druhý krok vystřihneme z obrázku 9b čtyřúhelník 1594 – obrázek 10a. Zůstane „límec" složený z osmi čtyřúhelníků, který spojitou deformací „narovnáme" do obdélníkového tvaru, obrázek 10b.

Ve třetím a čtvrtém kroku postupně přesuneme body 9 a 5 a také body 4 a 1 podle obrázků 10c a 10d.

V pátém kroku „promáčkneme" oblouky na levé a pravé straně směrem do středu – obrázek 10e. Ve všech krocích provádíme spojité deformace tak, aby se žádné dvě hrany grafu G neprotínaly. Poslední obrázek 10e je připraven na slepení do tvaru **dvojitého Möbiova listu**. Vidíme jej na obrázku 11. Slepujeme přitom dvojice stejně označených bodů.

Dvojitý Möbiův list má stejnou vlastnost jako jednoduchý Möbiův list. Jeho okraj tvoří jedna jediná uzavřená kruhová čára. Snadno se o tom můžete přesvědčit, „pojedete-li" bez přerušení prstem po okraji tohoto dvojitého Möbiova listu, vrátíte se opět na výchozí místo a přitom „projedete" každým bodem tohoto okraje. Tato kruhová čára tvoří hranici „kruhového" otvoru v ploše dvojitého Möbiova listu. Tento otvor odpovídá hranici původně vyříznuté „čtvercové" oblasti 1594 z obrázku 10a. „Zalepíme-li" dvojitý



Obr. 11

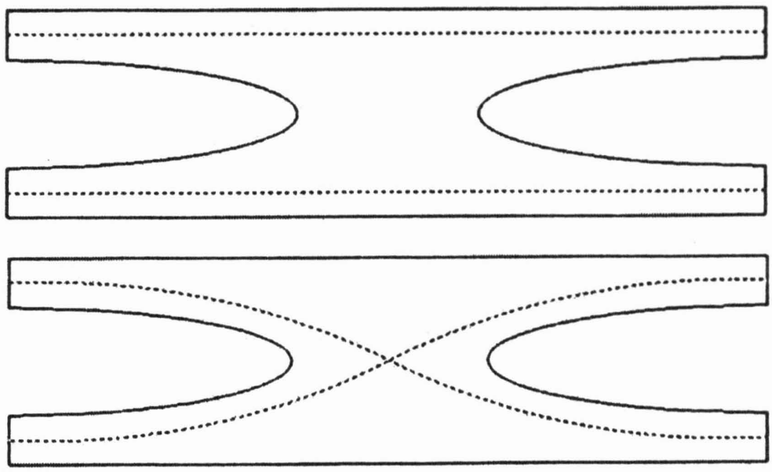
Möbiův list touto „čtvercovou" oblastí, vznikne Kleinova láhev, viz např. [2] a na ní pravidelný graf G. Doplníme-li v něm úhlopříčky všech čtyřúhelníkových oblastí, dostaneme model úplného grafu K_9 s devíti průsečíky.

Uvedeme ještě jednu zajímavou vlastnost dvojitého Möbiova listu. Na obrázku 12a je znázorněn dvojitý Möbiův list (ještě před slepením) se dvěma rovnoběžnými tečkovanými čarami. Zdá se, že když slepený dvojitý Möbiův list rozstřihneme podél obou tečkovaných čar, rozpadne se na tři samostatné části. **Ale** ... Zkuste to prozkoumat.

Rozstřihneme-li dvojitý Möbiův list podle zkřížených tečkovaných čar na obrázku 12b, může se zdát, že se dokonce rozpadne na čtyři samostatné části. **Ale** ... Zkuste to opět prozkoumat.

★ ★ ★

Jako doplněk příspěvku uvedeme pro porovnání tabulku průsečíkových čísel úplných grafů K_n pro $n \leq 10$ v eukleidovské a



Obr. 12a,b

projektivní rovině, na Kleinově láhvi a na anuloidu.

n	5	6	7	8	9	10
Eukleidovská rovina	1	3	9	18	36	60
Projektivní rovina	0	0	3	9	18	30
Kleinova láhev	0	0	1	4	9	21[6]
Anuloid	0	0	0	4	9	27

Podrobnosti jsou v práci [2], kde lze najít odkazy na další literaturu, např. na práce P. Erdöse, R. K. Guye, F. Hararyho, A. Hilla, J. Blažka, A. Saatyho, K. Zarankiewizce, H. Harbortha, J. W. Moona, T. Jenkynse, J. Schaera.

Literatura

[1] Blažek, J., Koman, M., *A minimal problem concerning complete plane graphs*, in: M. Fiedler (Ed.), Theory of Graphs

[6] Údaj označený v tabulce hvězdičkou odpovídá obrázku uvedenému v práci [1] na straně 38 a opravuje tak chybný údaj uvedený v téže práci v tabulce uvedené na straně 37.

and its Applications, Proceedings of the Symposium on Smolenice, 1963, Publ. House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1964 113–117

[2] Koman, M., *On the crossing numbers of graphs*, Acta Universitatis Mathematica et Physica„ **10**(1969), s. 9–46

[3] Ringel, G., *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959

[4] http://mathworld.wolfram.com/KleinBottle.html. Na této webové stránce můžeme Kleinovu láhev otáčet a prohlížet ji tak ze všech stran.

Prof. RNDr. Milan Koman, CSc.
KMDM PedF UK
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
e-mail: milan.koman@pedf.cuni.cz