Učitel matematiky

Radka Smýkalová

Trigonometrie v Evropě v 15.-17. století

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 4, 201–212

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150598`

TRIGONOMETRIE V EVROPĚ V 15.–17. STOLETÍ

Radka Smýkalová

Po šesti stoletích vědecky neplodného raného středověku (konec 5. až začátek 12. století), kdy se evropští učenci zabývali výhradně náboženskými a scholastickými úvahami, nastalo v Evropě postupné oživování věd a umění, které bylo spojeno se vznikem městské kultury. V době obchodních výprav a křižáckých válek se Evropané seznámili nejen s vymoženostmi východní kultury, ale i s kulturními poklady dávno zapomenutého antického světa. To vše dalo mohutný podnět k samostatné tvůrčí činnosti evropských učenců. Pozvolna začíná jedno z nejkrásnějších a na památky nejbohatších období v dějinách Evropy – renesance.

Neopomenutelný význam pro rozvoj matematiky měly překlady z řečtiny a arabštiny do jazyka latinského, který se stal společným pro všechny západoevropské učence té doby. Například do latiny přeložený Ptolemaiův *Almagest* (z řečtiny i arabštiny) mohli středověcí evropští matematici a astronomové studovat již ve druhé polovině 12. století.

Podoba a přehlednost trigonometrických tabulek ve středověké Evropě byly závislé na způsobu zapisování čísel a jejich vyjadřování zlomky. S naší moderní desítkovou poziční soustavou a s indo-arabskými číslicemi byla Evropa seznámena v 8. století. Tento indo-arabský systém nebyl ihned přijat širokou veřejností, která dávala přednost zápisům čísel pomocí římských číslic. Díky výkladu o indo-arabských číslicích v díle *Liber abaci* (1202) od Leonarda Pisánského (zvaného Fibonacci) však získala desítková poziční soustava všeobecnou podporu ve vědeckých kruzích.

První trigonometrické tabulky využívající nového systému byly sestaveny okolo roku 1460 rakouským astronomem a matematikem Georgem Peurbachem (1423-1461). Na rozdíl od Ptolemaia, který položil poloměr kruhu r rovný 60 jednotkám a následně délky tětiv vyjadřoval pomocí šedesátinných zlomků, Peurbach kombinoval systém o základu šedesát se systémem o základu deset. Zvolil poloměr kruhu $r = 600\,000$ jednotek a hodnoty trigonometrických veličin vyjadřoval celými čísly v desítkovém systému. Peurbachův žák Regiomontanus, o němž se více zmíníme v následujícím odstavci, nejdříve zvětšil poloměr kruhu na $r = 6\,000\,000$, ovšem velice brzy se šedesátkového systému vzdal a roku 1467 sepsal první čistě desetinné trigonometrické tabulky při poloměru kruhu $r = 10^7$. Hodnoty trigonometrických veličin byly opět zapisovány celými čísly. Při přechodu od $r = 10^7$ ke konečnému $r = 1$, jak je tomu dnes, se význam těchto tabulek neztratil: zapsaná celá čísla se stala čitateli desetinných zlomků (desetinná čárka se posunula o sedm míst doleva). Ke skutečnému přechodu k desetinným zlomkům dospěl ve svých trigonometrických tabulkách až F. Viète. Pro zajímavost uvedeme Viètův zápis hodnoty jedné z goniometrických veličin (při $r = 10^5$):

$$\sin 60^\circ = 86{,}602|540{,}37.$$

Svislá čára odděluje čitatele zlomku od celého čísla (jmenovatele Viète vynechává) a čárky slouží k seskupování řádů od nuly vždy po třech. Dnes bychom jeho výsledek zapsali smíšeným číslem ve tvaru $\sin 60^\circ = 86602\frac{54037}{10^5}$.

Až do 16. století stáli u rozvoje trigonometrie hlavně astronomové. Není tedy žádným překvapením, že jím byl i vynikající německý matematik Johannes Müller alias Regiomontanus (1436–1476), který napsal dílo *O trojúhelnících všelikých knih patero* – první evropskou práci, v níž byla trigonometrie chápána jako samostatná matematická disciplína. V této významné práci, která se skládala z pěti knih, Regiomontanus metodicky uspořádal trigonometrické znalosti Ptolemaia a indických a arabských učenců. První kniha začíná zavedením základních pojmů. Funkce sinus je zde uvedena po vzoru indické definice. Ta pravá trigonometrie (tedy řešení obecných trojúhelníků) se objevuje až v knize druhé. Sinová věta, stejně tak jako všechna ostatní pravidla, je uvedena pomocí slovních spojení, nikoli v symbolech. Objevuje se zde také poprvé vzorec pro obsah S trojúhelníka ABC ve tvaru

$$S = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

Je neobvyklé, že Regiomontanus nikdy nepoužil funkci tangens, přestože ji musel znát, ať už od svého blízkého přítele Peurbacha, nebo z arabských výpočtů sinů.

Zbývající tři knihy pojednávají o sférické geometrii a trigonometrii – obou nezbytných nástrojích astronomie. Regiomontanus celé dílo dokončil roku 1464, avšak publikováno bylo až roku 1533.

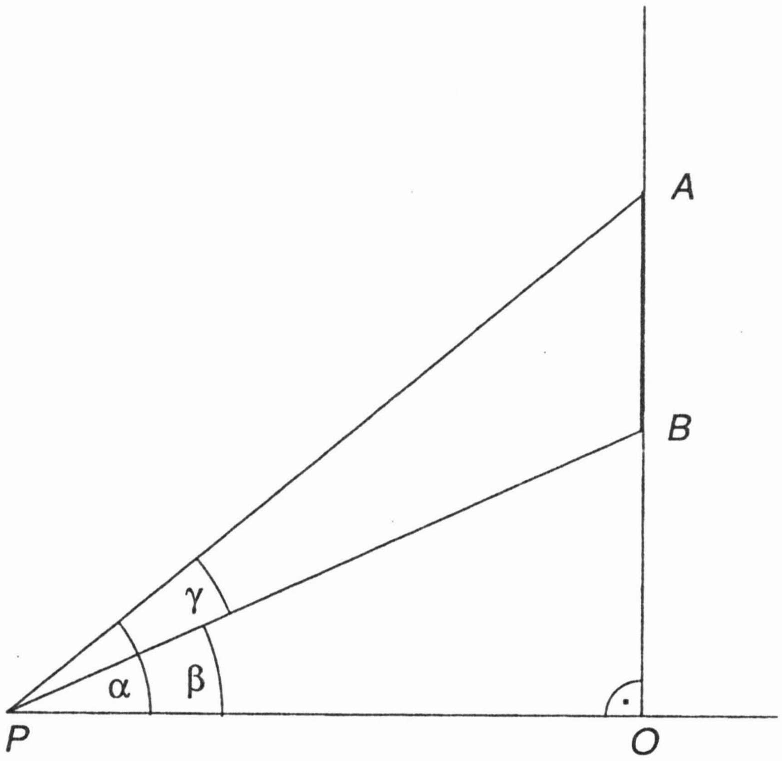
Nyní se zmíníme o jedné Regiomontanově úloze, v níž se hledá maximum. Byla to mimochodem první úloha tohoto druhu od dob starořecké matematiky. Jelikož žil Regiomontanus dvě stě let před objevením diferenciálního počtu, řešil problém elementární metodou. Zadání zní: Tyč AB dané délky je zavěšena svisle tak, že se nedotýká podlahy. Vzdálenost mezi spodním koncem tyče B a podlahou je dána délkou úsečky BO (viz obr. 1). Otázka zní: V jaké vzdálenosti od bodu O se nachází na podlaze bod P, z něhož je tyč vidět pod největším úhlem γ?

Regiomontanus pro své řešení vyjádřil poměr $\cos\gamma : \sin\gamma$ (veličiny tangens a kotangens nepoužíval) ve tvaru součtu dvou zlomků, který bychom dnes pomocí vzorce pro kotangens rozdílu úhlů α, β z obrázku odvodili takto:

$$\operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta + 1}{\operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \alpha} =$$

$$= \frac{\frac{|PO|}{|AO|}\frac{|PO|}{|BO|} + 1}{\frac{|PO|}{|BO|} - \frac{|PO|}{|AO|}} = \frac{|PO|}{|AO| - |BO|} + \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO| - |BO|) \cdot |PO|}.$$

Největší možný úhel γ odpovídá nejmenší možné hodnotě $\operatorname{cotg} \gamma$. Základem dalšího Regiomontanova postupu pro odhad součtu dvou zlomků byla užitečná nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných čísel u a v. Tato nerovnost $\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{u \cdot v}$ se stane rovností právě tehdy, když kladná čísla u a v jsou si rovna. Položíme-li $u = \frac{|PO|}{|AO|-|BO|}$ a $v = \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO|-|BO|) \cdot |PO|}$,



Obrázek 1 Extremální Regiomontanova úloha

obdržíme

$$\operatorname{cotg}\gamma = u + v \geq 2\sqrt{u\cdot v} =$$
$$= 2\sqrt{\frac{|PO|}{|AO|-|BO|}\cdot\frac{|AO|\cdot|BO|}{(|AO|-|BO|)\cdot|PO|}} = \frac{2\sqrt{|AO|\cdot|BO|}}{|AO|-|BO|}.$$

Nejmenší hodnota cotg γ tedy nastane, když bude platit $u = v$:

$$\frac{|PO|}{|AO|-|BO|} = \frac{|AO|\cdot|BO|}{(|AO|-|BO|)\cdot|PO|},$$
$$|PO| = \sqrt{|AO|\cdot|BO|}.$$

Hledaný bod P je umístěn od bodu O ve vzdálenosti, která je rovna geometrickému průměru výšek bodů A a B měřených od podlahy. V geometrické interpretaci je takový bod P bodem kružnice, která prochází koncovými body A, B tyče a dotýká se přímky podlahy právě v bodě P. Výsledek rovinné úlohy se svislou tyčí se pro Regiomontana stal rovněž motivací pro další velice zajímavou, tentokrát prostorovou úlohu o nalezení nejpříznivější pozice pro pohled do daného okna budovy.

V první polovině 17. století se o podstatný přínos pro praxi trigonometrických výpočtů zasloužil anglický matematik John Napier (1550-1617), když roku 1614 objevil logaritmy. Myšlenka za-

Obrázek 2 John Napier

vedení logaritmů má své kořeny právě u výpočtů podle trigonometrických vzorců, a to ve snaze převést součin či podíl trigonometrických veličin na jejich součet nebo rozdíl. Astronomové si totiž uvědomili, že počítání bude jednodušší a kratší, když hledané součiny a podíly vypočítají pomocí sčítání a odčítání.

Dnes chápeme logaritmy jako funkce. Hlavním zájmem Napierovy doby však bylo sestavení logaritmických tabulek. Mezi všemi průkopníky byl John Napier první, který sestavil přímo tabulky logaritmů hodnot sinů, nikoliv logaritmů čísel. Znovu připomeňme, že ještě v 17. století byly hodnoty sinu stále chápány jako délky. Aby dostal Napier požadovanou přesnost, položil $\sin 90^\circ = r = 10^7$ (stejně jako Regiomontanus). Na ukázku uvedeme jeden řádek z Napierovy tabulky, která se sestává ze sedmi sloupců.

$$34^\circ 40 | 5\,688\,011 | 5\,642\,242 | 3\,687\,872 | 1\,954\,370 | 8\,224\,751 | 55^\circ 20$$

První sloupec udává velikost úhlu α, druhý hodnotu sinu pro daný úhel α. V posledním sloupci se dočteme velikost úhlu doplňkového $(90^\circ - \alpha)$ a v předposledním hodnotu $\sin(90^\circ - \alpha)$, což je hodnota $\cos\alpha$ (hodnoty sinu a kosinu jsou tedy přirozená čísla menší než 10^7). Třetí a pátý sloupec uvádí tzv. Napierovy logaritmy sinu ze druhého resp. kosinu ze šestého sloupce. Podle této (dnes již zapomenuté) konstrukce se „logaritmem“ čísla x nazývalo číslo $y = \mathrm{NapLog}\, x$ určené rovností $x = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^y$. Konečně prostřední sloupec udává hodnotu rozdílu zápisů ve třetím a pátém sloupci, rovnou hodnotě Napierova logaritmu pro tangens úhlu v prvním sloupci:

$$\begin{aligned}\mathrm{NapLog}(\sin\alpha) - \mathrm{NapLog}(\cos\alpha) &= \\ &= \mathrm{NapLog}\left(10^7 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \mathrm{NapLog}(\mathrm{tg}\ \alpha).\end{aligned}$$

(Pro rozdíl Napierových logaritmů platí pro nás méně obvyklý vzorec $\mathrm{NapLog}(a) - \mathrm{NapLog}(b) = \mathrm{NapLog}(10^7 \cdot \frac{a}{b})$.) Jednotlivé řádky Napierovy tabulky odpovídají hodnotám úhlu α s krokem 1 minuta.

Pro zajímavost numericky ověříme hodnotu z třetího sloupce uvedeného řádku Napierovy tabulky:

$$y = \mathrm{NapLog}(5\,688\,011) \Leftrightarrow 5\,688\,011 = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^y.$$

Poslední rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé y:

$$y = \frac{\ln \frac{10^7}{5\,688\,011}}{\ln \frac{10^7}{10^7 - 1}}.$$

Jmenovatel posledního zlomku je velmi malé kladné číslo:

$$\ln \frac{10^7}{10^7 - 1} = \ln\left(1 + \frac{1}{10^7 - 1}\right) \doteq \frac{1}{10^7 - 1} \text{ podle vzorce}$$

$$\ln(1 + x) \doteq x,$$

takže pro hledanou hodnotu y dostáváme přibližné vyjádření

$$y \doteq (10^7 - 1) \cdot \ln \frac{10^7}{5\,688\,011} \doteq 5642244.$$

Další osobností z přelomu 16. a 17. století, která se zasloužila o přetvoření celé matematiky, a tedy i trigonometrie, do podoby, jak ji známe dnes, není nikdo jiný než velký francouzský aritmetik a algebraik, ale také geometr a především velký právník a advokát, Francois Viète (1540 – 13. 12. 1603). Jeho nejdůležitejší dílo *Úvod*

Obrázek 3 Francois Viète

do analytického umění z roku 1591 je považováno za nejrannější práci o symbolické algebře, ve které se čtenář seznamuje se systémem zápisu matematických vztahů, který odpovídá dnešnímu. Známé veličiny Viète označuje souhláskami a neznámé samohláskami, rovnici definuje jako porovnání neznámé veličiny s veličinou pevně danou a podává základní pravidla pro řešení rovnic. Tento Vièt̊uv přínos – přechod od slovní k symbolické algebře – je jeden z nejdůležitějších počinů v historii matematiky.

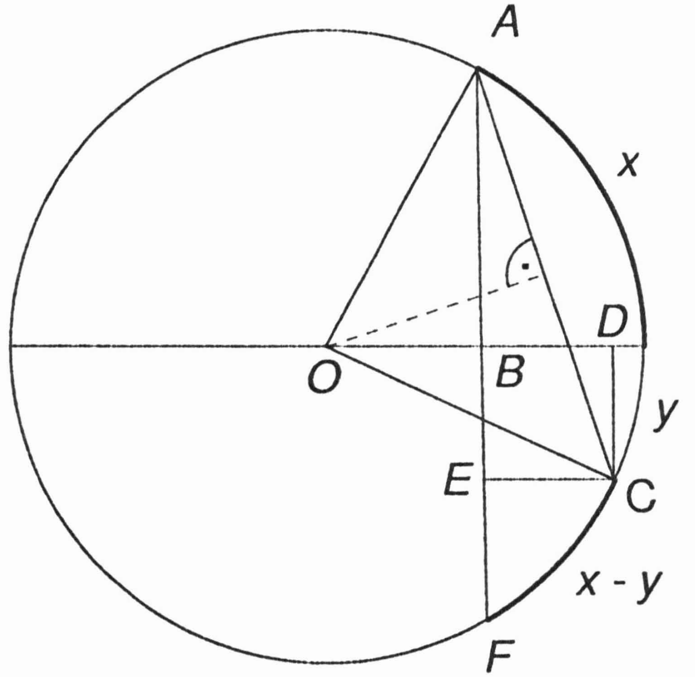
Nás ovšem především zajímá Vièt̊uv přínos v oblasti trigonometrie. Stejně tak jako byl Viète úspěšným zakladatelem symbolické algebry, může být také oprávněně nazýván otcem celkového analytického přístupu k trigonometrii. Ve svém díle *Canon mathematicus* z roku 1579 zhotovil rozsáhlé tabulky všech šesti trigonometrických veličin pro úhly blízké jedné minutě. Viète v nich dal přednost desetinným zlomkům před šedesátinnými. Aby se ovšem vyhnul zápisům tisíců zlomků, vybral si pro tvorbu sinových a kosinových tabulek hodnotu $r = \sin 90° = 100\,000$.

Při řešení ostroúhlých trojúhelníků Viète objevil tvrzení ekvivalentní tangentové větě, kterou dnes zapisujeme vzorcem

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

a která měla po staletí velký význam, neboť narozdíl od kosinové věty umožnila při trigonometrických výpočtech užívat logaritmy. Ačkoliv byl Viète možná prvním, kdo zmíněnou formuli používal, poprvé vyšla tiskem až roku 1583 v díle *Geometria rotundi* od autora Thomase Fincka.

Ve Viètově době se objevovaly v celé Evropě různé druhy dalších trigonometrických vzorců, které měly za následek snížení pracnosti výpočtů při řešení trojúhelníků. Mezi nimi byla také skupinka vzorců, pomocí kterých se dal součin či podíl převést na součet či rozdíl (nebo naopak). Pomocí obr. 4 odvodíme spolu s Viètem alespoň jeden z nich. Obloukům délek x, y odpovídají



Obrázek 4

hodnoty $\sin x = |AB|$ a $\sin y = |CD|$. Potom platí

$$\sin x + \sin y = |AB| + |CD| = |AE| = \\ = |AC| \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

v posledním kroku jsme využili toho, že AC je základnou rovnoramenného trojúhelníku OAC s úhlem $x + y$ při vrcholu O. Když zavedeme substituce $A = \frac{x+y}{2}$ a $B = \frac{x-y}{2}$, obdržíme užitečnější tvar

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B.$$

Podobným způsobem lze odvodit vztahy

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B,$$
$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B,$$
$$\cos(A - B) - \cos(A - B) = 2 \sin A \sin B.$$

Jeden z těchto vzorců - převod součinu kosinů na jejich součet - byl znám již arabským učencům, ovšem až koncem 16. století, a to hlavně zásluhou Vièta, se všechny tyto vztahy staly široce užívanými. Když například chtěl někdo vynásobil dvě čísla 98,436 a 79,253, přiřadil polovinu prvního čísla a číslo druhé kosinům $\cos A = 49{,}218$ $(49{,}218 = \frac{98{,}436}{2})$ a $\cos B = 79{,}253$ a z tehdy dostupných tabulek pro trigonometrické veličiny zjistil úhly A a B. Z tabulek vyhledal hodnoty $\cos(A+B)$ a $\cos(A-B)$ a jejich sečtením získal kýžený součin zadaných čísel 98,436 a 79,253. Poznamenejme, že součin byl nalezen bez použití operace násobení a bez logaritmů. Aplikací výše zmíněných vztahů na výpočet součinu dvou čísel jsme zřejmě moc času a energie neušetřili. Když si však uvědomíme, že trigonometrické tabulky v té době s více jak deseti nebo patnácti platnými číslicemi nebyly nijak neobvyklé, staly se vztahy pro převod součinu na součet stále užívanější. S podíly bylo možno zacházet stejným způsobem, tentokrát za dopomoci tabulek pro sekans a kosekans.

Asi nikde není Vièttovo zobecnění ryzí trigonometrie na analytickou teorii goniometrických funkcí výraznější než ve spojitosti s jeho vzorci pro n-násobný úhel. Vztahy pro dvojnásobný úhel sinu a kosinu byly známy již Ptolemaiovi a vztahy pro trojnásobný úhel mohly být jednoduše odvozeny z Ptolemaiových vzorců pro sinus a kosinus součtu dvou úhlů. Pouze s velkým úsilím bychom s pomocí Ptolemaiových pravidel dospěli ke vztahům pro $\sin nx$ a $\cos nx$. Viète použil duchaplnou myšlenku týkající se pravoúhlých trojúhelníků a velice známé algebraické identity

$$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2) = (ad+bc)^2+(bd-ac)^2 = (ad-bc)^2+(bd+ac)^2$$

k tomu, aby dospěl ke vzorcům pro vícenásobné úhly rovnocenné s těmi, které dnes zapisujeme ve tvaru

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\sin^2 x + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\sin^4 x - \ldots$$

a

$$\sin nx = n\cos^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\sin^3 x + \ldots$$

Jak jsme již zmínili, byl to právě Viète, s nímž si trigonometrie začala osvojovat svůj moderní analytický charakter. Kromě symbolické algebry k tomu přispěla také analytická geometrie, u jejíhož zrodu stáli velikáni jako byl francouzský filosof, matematik a fyzik René Descartes (1596-1650) a francouzský matematik Pierre de Fermat (1601-1665). Tento objev je skutečně pro goniometrii významný. Uvědomme si, že dnes se goniometrické funkce sinus a kosinus definují pomocí souřadnic bodů na jednotkové kružnici.

K dalšímu rozvoji trigonometrie a jejímu přerodu v samostatnou matematickou disciplínu, které dnes říkáme goniometrie, přispěla v první polovině 17. století narůstající vlna uplatnění goniometrických funkcí, a to nejenom při triangulačních výpočtech na určování poloh a vzdáleností užívaných nejčastěji pro účely geodézie, navigace, metrologie, astrometrie nebo při řízení palby, ale také v nových oblastech fyziky, které byly od samotné trigonometrie vzdálené. Galileův objev, že každý pohyb může být rozložen na dvě složky podél kolmých os, volal po užívání trigonometrických veličin. V 17. století, kdy se velice cenila dělostřelecká dovednost, byla velice významnou motivací snaha pomocí výpočtů s goniometrickými veličinami určit místo dostřelu projektilu vystřeleného z kanónu.

V souvislosti s triangulační metodou zmíníme alespoň holandského astronoma a matematika Willebrorda Snella (1580-1626), který se zabýval určováním délek zemských rovnoběžek. Po vyslovení tohoto jména v souvisloti s goniometrií by byl hřích opomenout jeho zákon o lomu světla, který zní: poměr sinu úhlu dopadu a sinu úhlu lomu je pro dvě různá homogenní prostředí stálý a rovný poměru velikostí rychlostí vlnění v jednotlivých prostředích.

Další oblast fyziky, která byla výrazně studována v 17. a 18. století, se zabývala jedním z periodických pohybů – kmitáním. Velké námořní plavby v té době si žádaly stále větší přesnost navigační techniky. To přimělo vědce zabývat se kmitáním kyvadel a pružností různých druhů. Uvedeme alespoň jméno nizozemského fyzika a matematika, který vytvořil teorii fyzikálního kyvadla a zkonstruoval kyvadlové hodiny. Nebyl jím nikdo jiný než Christiaan Huyghens (1629-1695). S narůstajícím zdokonalováním hudebních nástrojů byli také vědci stále více motivováni zabývat se chvěním (kmitáním) strun, zvonů a dechových píšťal, při kterých goniometrické funkce hrají zásadní roli. Všechny tyto výše popsané jevy zdůrazňují velkou roli trigonometrie v popisu periodických jevů.

Další významnou osobností v historii matematiky, která rozšířila a doplnila všechny oblasti matematického myšlení, mnohé tak dobře, jakoby byly nově vytvořeny, nemůže být nikdo jiný než Leonhard Euler, který žil již v 18. století. O něm tedy více v přístím čísle.

Literatura

[1] Maor Eli. *Trigonometric delights.* Princeton University Press, Princeton, 1998.

[2] Červený Martin. *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích - diplomová práce.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.

[3] http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_strana.

[4] Juškevič Adolf P. *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1977.

[5] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html.

[6] Boyer Carl B. *A History of Mathematics.* John Wiley and sons, INC, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.

[7] Katz Victor J. *A History of Mathematics.* Addison Wesley, Menlo Park, New York, Harlow, Don Mills, Sydney, Mexico City, Madrid, Amsterdam, 1998.

[8] http://www.geneze.info/jmena/osobnosti.htm.

[9] http://mathworld.wolfram.com/NapierianLogarithm.html.

[10] Dr. A. von Braunmühl. *Geschichte der Trigonometrie.* 1900.

[11] Veselý Jiří. *Matematická analýza pro učitele.* 1997.

[12] P. J. Kožeurov. *Trigonometrie.* 1955.

[13] Ivor Grattan-Guinness. *The Rainbow of Mathematics.* 1997.

Mgr. Radka Smýkalová
Ústav matematiky a statistiky PřF MU Brno
Kotlářská 2, 611 37 Brno
e-mail: xsmykal@math.muni.cz