Ladislav Beran; Milan Trch

Přímka, kterou hledáte (2)

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 3, 165–168

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150582

PŘÍMKA, KTEROU HLEDÁTE (2)

LADISLAV BERAN, MILAN TRCH

V článku [1] jsme popsali, jak lze pro dané body $M_1 = [a_1, b_1]$, $M_2 = [a_2, b_2], \cdots, M_7 = [a_7, b_7]$ nalézt přímku p_{min} o rovnici $y = kx + q$, která má co nejmenší součet

$$(c(M_1, p_{min}))^2 + (c(M_2, p_{min}))^2 + \cdots + (c(M_7, p_{min}))^2,$$

v němž $c(M_i, p_{min})$ značí vzdálenost „ve směru osy y" bodu M_i od přímky p_{min}, tj. číslo

$$c(M_i, p_{min}) = |b_i - (ka_i + q)|.$$

Podívejme se na věc z obecnějšího hlediska. Předpokládejme, že je dáno n bodů ($n \geq 2$)

$$M_1 = [a_1, b_1], M_2 = [a_2, b_2], \cdots, M_n = [a_n, b_n],$$

kde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ a $b_1, b_2, \cdots, b_n$ značí libovolná reálná čísla. Hledejme – v souladu s metodou nejmenších čtverců – přímku p_{min} o rovnici $y = kx + q$ takovou, že součet

$$T_n := (c(M_1, p_{min}))^2 + (c(M_2, p_{min}))^2 + \cdots + (c(M_n, p_{min}))^2$$

je co nejmenší. (Zde jako výše značí $c(M_i, p_{min})$ číslo $|b_i - (ka_i + q)|$.) Přímku p_{min} nazveme *minimální přímka* bodů M_1, M_2, $\ldots$, M_n.

Při pevně zvolených číslech $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ se lze na T_n dívat jako na funkci dvou proměnných k a q. Označme ji $g(k, q)$. Výše formulovanou úlohu můžeme nyní chápat jako hledání takových podmínek na k a q, aby číslo $g(k, q)$ bylo co nejmenší. V našem prvním článku [1] jsme při určování takovýchto podmínek vycházeli ze soustavy

$$\begin{aligned} Ak + nq &= B \\ Ck + Aq &= D \end{aligned} \tag{1}$$

V souladu se speciálním případem z [1] položme

$$\begin{aligned} &A := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ B := b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \\ &C := a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \ D := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \\ &E := b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2. \end{aligned}$$

Podle definice je

$$\begin{aligned} g(k,q) &= (b_1 - ka_1 - q)^2 + (b_2 - ka_2 - q)^2 + \cdots + \\ +(b_n - ka_n - q)^2 &= b_1^2 + k^2 a_1^2 + q^2 - 2a_1 b_1 k - 2b_1 q + 2ka_1 q + \\ &+ b_2^2 + k^2 a_2^2 + q^2 - 2a_2 b_2 k - 2b_2 q + 2ka_2 q + \ldots \end{aligned}$$

Proto máme

$$g(k,q) = E + k^2 C + nq^2 - 2Dk - 2Bq + 2kqA. \tag{2}$$

Protože číslo E představuje při zvolených číslech a_i a b_i konstantu vůči k a q, můžeme říci, že $g(k,q)$ nabývá nejmenší hodnotu pro nějaké k_0 a q_0 právě když

$$h(k,q) := k^2 C + 2kqA - 2Dk + nq^2 - 2Bq$$

nabývá nejmenší hodnotu pro k_0 a q_0.

V dalším předpokládejme, že

$$n \geq 2 \tag{3}$$

a že

alespoň dvě z čísel $a_1, a_2, \ldots a_n$ se sobě nerovnají. (4)

Pak ovšem

$$C = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0. \tag{5}$$

Přistupme nyní k formulaci a důkazu hlavní věty.

Věta 1. *Nechť platí (3) a (4). Pak přímka o rovnici $y = kx + q$ je minimální přímkou bodů $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$, právě když k a q jsou řešením soustavy (1).*

Důkaz: Podle předchozího máme dokázat, že (1) platí právě když $h(k,q)$ nabývá nejmenší hodnoty.

Abychom to nahlédli, upravme nejprve $h(k,q)$ doplněním na úplné čtverce:

$$h(k,q) = C\left(k + q\frac{A}{C}\right)^2 - Cq^2\frac{A^2}{C^2} - 2Dk + nq^2 - 2Bq =$$

$$= C\left(k + q\frac{A}{C}\right)^2 - \frac{A^2q^2}{C} - 2D\left(k + q\frac{A}{C}\right) + \frac{2AD}{C}q + nq^2 - 2Bq.$$

Tedy

$$h(k,q) = [C(k + q\frac{A}{C})^2 - 2D(k + q\frac{A}{C})] + \tag{6}$$
$$+ [\frac{nC - A^2}{C}q^2 - 2(B - \frac{AD}{C})q].$$

Podle [1, Věta 1], (4) a (5) je zde $C > 0$ a také $\frac{nC-A^2}{C} > 0$.

Z [1, Věta 2] usuzujeme, že druhý sčítanec v (6) nabývá nejmenší hodnoty právě když

$$q = \frac{B - \frac{AD}{C}}{n - \frac{A^2}{C}},$$

tj. právě když

$$\frac{AD}{C} - \frac{A^2}{C}q + nq = B. \tag{7}$$

Z [1, Věta 2] dále vidíme, že první sčítanec bude (při již zvoleném q splňujícím (7)) nejmenší právě když $k + q\frac{A}{C} = \frac{D}{C}$, tj. právě když

$$Ck + qA = D. \tag{8}$$

Podmínky (7) a (8) podle právě dokázaného jsou nutné a postačující k tomu, aby $h(k,q)$ bylo co nejmenší možné.

Pro zjednodušení souboru podmínek (7) a (8) postupme dále: Z (8) vidíme, že $ACk+qA^2 = AD$. To ukazuje, že $Ak+\frac{qA^2}{C} = \frac{AD}{C}$, takže

$$\frac{AD}{C} - \frac{A^2}{C}q = Ak \tag{9}$$

a ze (7) plyne, že

$$Ak + nq = B. \tag{10}$$

Nyni snadno ukážeme, že podmínky (8) a (10) zpětně implikují podmínky (7) a (8): Podle (8) platí (9), a tedy z (10) je ihned patrné, že

$$B = Ak + nq = \frac{AD}{C} - \frac{A^2}{C}q + nq,$$

takže vskutku platí (7).

Vztahy (8) a (10) platí tedy právě když $h(k, q)$ nabývá své nejmenší hodnoty. □

Poznámka. Z tvaru (2) pro $g(k, q)$ nacházíme, že

$$\frac{\partial g}{\partial k} = 2kC - 2D + 2qA$$

a

$$\frac{\partial g}{\partial q} = 2nq - 2B + 2kA.$$

Vidíme tak, že podmínky $\frac{\partial g}{\partial k} = 0$ a $\frac{\partial g}{\partial q} = 0$ kladené na stacionární body funkce $g(k, q)$ vedou na soustavu (1).

Literatura

[1] Beran, L., Trch, M., Přímka, kterou hledáte (1), *Učitel matematiky* **70**(2009)

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Doc. RNDr. Milan Trch, CSc., Ph.D.
Katedra matematiky České zemědělské univerzity
Kamýcká 129, 165 21 Praha 6
e-mail: trch@tf.czu.cz