Jaroslava Brincková
75 - alebo hry s číslami

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 1, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150557

75 – ALEBO HRY S ČÍSLAMI[1]

JAROSLAVA BRINCKOVÁ

Úvod

Podľa súčasne platných učebných osnov ZŠ na Slovensku sa už žiaci 1. stupňa ZŠ oboznámia s rozvinutým zápisom čísla v desiatkovej číselnej sústave. Iné číselné sústavy sa len motivačne spomenú v piatom ročníku pri preberaní *Operácií s uhlami*. V šiestom ročníku v rámci tematického celku *Deliteľnosť prirodzených čísel* vedieme žiakov k hlbšiemu pohľadu do štruktúry desiatkovej číselnej sústavy. S informáciou o existencii dvojkovej číselnej sústavy sa stretávajú pri oboznamovaní sa s využitím výpočtovej techniky [2]. V rámci voliteľných tematických celkov na osemročnom gymnáziu sa môžu žiaci kvarty stretnúť aj s operáciami v dvojkovej a trojkovej číselnej sústave. [3] Táto téma poskytuje celý rad veľmi pekných motivačných úloh, ktoré umožňujú zvýšiť záujem o štúdium matematiky.

Motivácia v príprave učiteľov na prácu s talentami na ZŠ

Ako je z dejín aritmetiky známe, poskytovali sa žiakom pre občerstvenie ducha zábavné príklady, v ktorých buď riešenie svojim ostrovtipom alebo výsledok svojim pekným stvárnením celkom prekvapoval. Zo starších záznamov je známy komentár Al-Kalasadiho k aritmetickému spisu „Talkhys" od marokánskeho matematika Ibn Albana z prvej polovice XIII. storočia [1]. Uvádza sa v ňom:

$$\begin{aligned}
1 \times 1 &= \mathbf{1}\\
11 \times 11 &= 1\mathbf{2}1\\
111 \times 111 &= 12\mathbf{3}21\\
1111 \times 1111 &= 123\mathbf{4}321\\
11111 \times 11111 &= 1234\mathbf{5}4321
\end{aligned}$$

[1] Práce je věnována prof. Milanu Komanovi k 75. narozeninám

Podobne možno napísať

$$\begin{array}{rcl}
11\times 11 & = & 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1 \\
111\times 111 & = & 12\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 21 \\
1111\times 1111 & = & 1234\ \ 4\ \ 4\ \ 4321 \\
11111\times 111111111 & = & 12345\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 54321
\end{array}$$

Tiež násobenie deviatkou ponúka zaujímavé výsledky. Napríklad:

$$\begin{array}{lcl}
9\times 0 & +1 & = 1 \\
9\times \mathbf{1} & +2 & = 1\,1 \\
9\times 1\,\mathbf{2} & +3 & = 1\,1\,1 \\
9\times 1\,2\,\mathbf{3} & +4 & = 1\,1\,1\,1 \\
9\times 1\,2\,3\,\mathbf{4} & +5 & = 1\,1\,1\,1\,1 \\
9\times 1\,2\,3\,4\,\mathbf{5} & +6 & = 1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
9\times 1\,2\,3\,4\,5\,\mathbf{6} & +7 & = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
9\times 1\,2\,3\,4\,5\,6\,\mathbf{7} & +8 & = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
9\times 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,\mathbf{8} & +9 & = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
9\times 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,\mathbf{9} & +10 & = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1
\end{array}$$

Alebo podobný prípad:

$$\begin{array}{lcl}
9\times \mathbf{9} & +7 & = 8\,8 \\
9\times 9\,\mathbf{8} & +6 & = 8\,8\,8 \\
9\times 9\,8\,\mathbf{7} & +5 & = 8\,8\,8\,8 \\
9\times 9\,8\,7\,\mathbf{6} & +4 & = 8\,8\,8\,8\,8 \\
9\times 9\,8\,7\,6\,\mathbf{5} & +3 & = 8\,8\,8\,8\,8\,8 \\
9\times 9\,8\,7\,6\,5\,\mathbf{4} & +2 & = 8\,8\,8\,8\,8\,8\,8 \\
9\times 9\,8\,7\,6\,5\,4\,\mathbf{3} & +1 & = 8\,8\,8\,8\,8\,8\,8\,8 \\
9\times 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,\mathbf{2} & +0 & = 8\,8\,8\,8\,8\,8\,8\,8\,8
\end{array}$$

Ďalší zaujímavý námet pre osmičku:

$$
\begin{array}{ll}
8 \times \mathbf{1} & +1 = \mathbf{9} \\
8 \times 1\,\mathbf{2} & +2 = 9\,\mathbf{8} \\
8 \times 1\,2\,\mathbf{3} & +3 = 9\,8\,\mathbf{7} \\
8 \times 1\,2\,3\,\mathbf{4} & +4 = 9\,8\,7\,\mathbf{6} \\
8 \times 1\,2\,3\,4\,\mathbf{5} & +5 = 9\,8\,7\,6\,\mathbf{5} \\
8 \times 1\,2\,3\,4\,5\,\mathbf{6} & +6 = 9\,8\,7\,6\,5\,\mathbf{4} \\
8 \times 1\,2\,3\,4\,5\,6\,\mathbf{7} & +7 = 9\,8\,7\,6\,5\,4\,\mathbf{3} \\
8 \times 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,\mathbf{8} & +8 = 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,\mathbf{2} \\
8 \times 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,\mathbf{9} & +9 = 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,\mathbf{1}
\end{array}
$$

O mnoho zaujímavejšie sú potom podobné vlastnosti, ak nezávisia na určitej číselnej sústave. Právom preto patria do prípravy učiteľov matematiky ako motivácia pre výklad teórie čísel. Pre dekadickú sústavu vyslovil E. Lucas v spise *Théorie des nombres* [1] nasledujúcu vetu:

Ak obsahuje n číslicová sústava n číslic

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1},$$

tak, že ak použijeme naše číslice, tu platí

$$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3, \ldots$$

potom pri násobení všeobecne platí

$$(n-2) \times (c_1 c_2 c_3 \ldots c_k) + c_k = c_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \ldots c_{k+1} c_k$$

Z predchádzajúceho je zrejmé, že táto veta v desiatkovej sústave, teda pre $n = 10$ platí.
Pre *dvojkovú* sústavu z nej potom vyplýva

$$0 \times \mathbf{1} \quad +1 = \mathbf{1}$$

pre *trojkovú* sústavu podobne

$$
\begin{array}{ll}
1 \times \mathbf{1} & +1 = \mathbf{2} \\
1 \times 1\,\mathbf{2} & +2 = 2\,\mathbf{1}
\end{array}
$$

pre *štvorkovú* sústavu

$$\begin{array}{ll} 2 \times \mathbf{1} & +1 = \mathbf{3} \\ 2 \times 1\ \mathbf{2} & +2 = 3\ \mathbf{2} \end{array}$$

v *päťkovej* (pentadickej) sústave platí

$$\begin{array}{ll} 3 \times \mathbf{1} & +1 = \mathbf{4} \\ 3 \times 1\ \mathbf{2} & +2 = 4\ \mathbf{3} \\ 3 \times 1\ 2\ \mathbf{3} & +3 = 4\ 3\ \mathbf{2} \\ 3 \times 1\ 2\ 3\ \mathbf{4} & +4 = 4\ 3\ 2\ \mathbf{1} \end{array}$$

pre *hexadickú* (šestkovú) sústavu bude platiť

$$\begin{array}{ll} 4 \times \mathbf{1} & +1 = \mathbf{5} \\ 4 \times 1\ \mathbf{2} & +2 = 5\ \mathbf{4} \\ 4 \times 1\ 2\ \mathbf{3} & +3 = 5\ 4\ \mathbf{3} \\ 4 \times 1\ 2\ 3\ \mathbf{4} & +4 = 5\ 4\ 3\ \mathbf{2} \\ 4 \times 1\ 2\ 3\ 4\ \mathbf{5} & +5 = 5\ 4\ 3\ 2\ \mathbf{1} \end{array}$$

V *štrnásťčíselnej* sústave, obsahujúcej číslice $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D$ by teda platilo

$$\begin{array}{l} B \times 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ +5 = D\ C\ B\ A\ 9 \\ B \times 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ +7 = D\ C\ B\ A\ 9\ 8\ 7 \text{ atď.} \end{array}$$

Pozrime sa na vlastnosti čísel v sústave, ktorá má párny počet číslic. Môžeme ju vyjadriť nasledovne: $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_{2n-2}, c_{2n-1}$, kde $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2, \dots$.

Ak od čísla zapísaného zostupne číslicami $c_{2n-1}, c_{2n-2}, \dots, c_4, c_3, c_2, c_1$ *okrem číslice* c_0*, odčítame číslo* c_1*,* c_2*,* c_3*,* c_4*, ...,* c_{2n-2}*,* c_{2n-1} *napísané v opačnom poradí, teda vzostupne, rozdielom bude číslo, v ktorom sa nachádzajú opäť všetky číslice, ale v inom poradí*

$$\begin{array}{r} c_{2n-1}, c_{2n-2}, \dots, c_4, c_3, c_2, c_1 \\ -\quad c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_{2n-2}, c_{2n-1} \\ \hline c_{2n-2}, c_{2n-4}, \dots, c_4, c_1, c_{2n-1}, c_{2n-3}, c_{2n-5}, \dots, c_3, c_2 \end{array}$$

Na základe uvedeného platí:

štvorková	šestková	osmičková	desiatková
321	54321	7654321	987654321
−123	−12345	−1234567	−123456789
132	41532	6417532	864197532

V desiatkovej sústave každý ľahko pozná priamo

$$\begin{array}{r} 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1 \\ -\quad 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \hline 8\,6\,4\,1\,9\,7\,5\,3\,2 \end{array}$$

Ak vyjadríme príslušné čísla algebraicky, ľahko môžeme odôvodniť túto vlastnosť rozdielu.

Práca so žiakmi osemročného gymnázia

Osemročné gymnázium v Žitné ulici v Prahe malo už v roku 1896 v učebnom pláne piateho ročníka *Iné číselné sústavy*, pričom vzdelávací obsah bol porovnateľný s prípravou učiteľov matematiky pre 1. stupeň ZŠ. K podnetným matematickým cvičeniam mysle študentov gymnázia patrila aj nasledujúca úloha:

Úloha č. 1

Koľkokrát možno vyjadriť súčin

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2+e^2\right)\cdot\left(f^2+g^2+h^2+k^2\right)$$

ako súčet štyroch štvorcov $A^2+B^2+C^2+D^2$?

Riešenie úlohy vychádza z nasledujúcej úvahy:

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

ale aj

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

V dôsledku uvedeného môžeme súčin $\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2+e^2\right)$ previesť šesťkrát na súčet štyroch štvorcov $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$. Súčin $\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)\cdot\left(f^2+g^2+h^2+k^2\right)$ môžeme deväťkrát previesť na súčet štyroch štvorcov.

Preto súčin $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2+e^2)\cdot(f^2+g^2+h^2+k^2)$ môžeme previesť na súčet štyroch štvorcov $A^2+B^2+C^2+D^2$ najviac 54 krát.

Pri zvláštnych hodnotách vedú niektoré rozklady k totožným výsledkom. Napríklad pre súčin

$$(1^2+2^2)\cdot(3^2+4^2+5^2)\cdot(6^2+7^2+8^2+9^2)$$

môžeme napísať 44 rôznych výsledkov. Dvadsať z nich uvádzame:

$180^2+110^2+106^2+42^2$	$155^2+135^2+105^2+65^2$
$175^2+105^2+91^2+87^2$	$150^2+150^2+110^2+20^2$
$173^2+129^2+97^2+87^2$	$150^2+150^2+100^2+50^2$
$171^2+125^2+103^2+45^2$	$150^2+130^2+100^2+90^2$
$171^2+123^2+83^2+79^2$	$148^2+134^2+126^2+42^2$
$165^2+135^2+95^2+55^2$	$145^2+135^2+105^2+85^2$
$165^2+125^2+95^2+75^2$	$143^2+141^2+129^2+23^2$
$164^2+110^2+102^2+90^2$	$143^2+131^2+123^2+69^2$
$157^2+141^2+107^2+39^2$	$142^2+138^2+124^2+54^2$
$156^2+138^2+86^2+82^2$	$141^2+141^2+133^2+7^2$

Pre súčin $(1^2+2^2+3^2+4^2)\cdot(5^2+6^2+7^2)\cdot(8^2+9^2)$ je známych 36 súčtov štvoríc štvorcov. Napríklad:

$391^2+313^2+407^2+249^2$	$5^2+85^2+375^2+575^2$
$200^2+270^2+340^2+500^2$	$100^2+200^2+210^2+620^2$
$149^2+151^2+213^2+623^2$	$135^2+235^2+445^2+455^2$

Overte svoj ostrovtip pri hľadaní ostatných riešení. Uvedená úloha nám pomohla preklenúť bariéru niektorých poslucháčok, absolventiek dievčenských odborných škôl, v príprave učiteľov matematiky pre 2. stupeň ZŠ hlavne pri precvičovaní operácií s algebraickými výrazmi.

Záver

Úlohy matematickej olympiády poskytujú študentom v 3. ročníku štúdia učiteľstva matematiky pre ZŠ priestor pre hľadanie a prezentáciu riešení adičných a multiplikačných úloh, v ktorých výsledok alebo postup je žiakov ZŠ prekvapivý. Tým obohacujú didaktické vedomosti budúcich učiteľov matematiky. Spojenie poznatkov z psychológie, pedagogiky a matematiky dáva priestor pre vznik netradičných úloh v ktorých sa rozvíja poznanie učiteľa. Napríklad v číselných rodinkách s ktorými jubilant pracoval pri tvorbe učebných materiálov pre ZŠ. Pretransformovali sme jeho námety do vyučovania takto:

Úloha č. 2: Vyjadrite 75 ako súčet dvoch (troch, štyroch, ...) rôznych prvočísel a charakterizujte záujmy osobností podľa veku priradeného sčítancami. Doplňte chýbajúce riešenia a charakteristiky.

$75 = p + n = 2 + 73 \ldots$ pravnuk a pradedo

$75 = p + p + n = 2 + 2 + 71 \ldots$ dvaja pravnuci a pradedo

$75 = n + n + n = 13 + 19 + 43 \ldots$ učiteľ a dvaja gymnazisti

$75 = p + n + n + n = 2 + 3 + 5 + 67 = 2 + 7 + 13 + 53 = \ldots$

$75 = p + n + n + n = 2 + 3 + 23 + 47 = \ldots$ babička + dcéra a jej dve deti ...

$75 = p + n + n + n = 2 + 13 + 19 + 41 = 2 + 19 + 23 + 31 = 2 + \ldots$

$75 = p + p + p + p + n = 2 + 2 + 2 + 2 + 67 =$

$75 = p + p + n + n + n = 2 + 2 + 17 + 23 + 31 =$

$75 = n + n + n + n + n = 5 + 11 + 13 + 17 + 29$

Myšlienka motivovania ku skúmaniu v matematike pomocou prvočíselných rodín a skupín priateľov sa v práci študentov aj počas ich súvislej praxe osvedčila. Želáme preto prof. Milanovi Komanovi, aby ho veľa prvočíselných skupín priateľov nasledovalo v skúmaní v matematike.

Literatúra

[1] Studnička, F. J., Hříčky multiplikační vůbec a příslušná poučka Lucasova zvlášť, *Časopis pro pěstování Mathematiky*

a Fysiky Praha JČMF 1896, roč.XXV, s. 289 – 293.

[2] Učebné osnovy Matematika pre 5. –9. ročník ZŠ z roku 1997(www.statpedu.sk)

[3] Učebné osnovy Matematika pre 8. ročné gymnáziá z roku 1996 (www.statpedu.sk)

Doc. RNDr. Jaroslava Brincková, CSc.
Katedra matematiky, FPV UMB
Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
Slovenská republika
e-mail: brinckov@fpv.umb.sk