Jiří Mazurek

Netradiční užití matic ve středoškolské matematice

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 3, 168–173

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150527`

NETRADIČNÍ UŽITÍ MATIC VE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATICE

JIŘÍ MAZUREK

Ve středoškolské matematice se žáci učí (pokud vůbec) jen nejjednodušší maticové operace: sčítání a odčítání matic, násobení matice reálným číslem a vektorem, vzájemné násobení dvou matic a úpravu matice na trojúhelníkový tvar. Užití matic se nejčastěji demonstruje řešením soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. Cílem tohoto článku je na čtyřech úlohách ukázat další možnosti užití matic, a to v geometrii, při předpovídání počasí nebo v ekonomii. U žáků se předpokládají jen výše zmíněné znalosti maticových operací.

1. Najděte matici K, která otáčí libovolný vektor v rovině o úhel 90° a zároveň nemění jeho velikost.

Žákům je na začátku vhodné ukázat, že pokud si vybereme libovolný sloupcový vektor, např. $\mathsf{u} = (3, 1)^T$, a libovolnou matici, například $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, je výsledkem násobení $A \cdot \mathsf{u}$ obecně jiný vektor v, v tomto případě je $\mathsf{v} = (5, 10)^T$. Náčrtkem v pravoúhlé soustavě souřadnic se můžeme přesvědčit, že vektor u se působením matice A pootočil a zároveň se změnila jeho velikost. Druhý pokus s násobením lze učinit s maticí $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matice E vektor u nemění, protože je *jednotková*. Pokud žákům napovíme, že hledaná matice může obsahovat pouze 1 a 0, jistě po chvilce zkoušení uhodnou správná řešení:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obecně lze *operátor rotace* v rovině zapsat jako

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice je roven 1 (determinant matice, která nemění velikost vektoru, může být pouze 1).

2. Najděte matici Z_x, která zobrazuje libovolný vektor v rovině v osové souměrnosti podle osy x.

Zrcadlením vektoru $\mathsf{u} = (a, b)$ podle osy x získáme vektor $\mathsf{v} = (a, -b)$, jak se můžeme přesvědčit náčrtkem. Matice Z_x tedy ponechává první souřadnici nezměněnou, proto horní řádek řádek matice tvoří vektor $(1, 0)$, a zároveň mění znaménko u druhé souřadnice, proto druhý řádek matice Z_x tvoří vektor $(0, -1)$. Máme tedy:

$$Z_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Žáci mohou analogicky nalézt matici zrcadlení podle osy y: $Z_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tentokrát mají obě matice determinant rovný -1.

3. V jistém regionu spolu soupeří dvě firmy vyrábějící nápoje: první firma vyrábí nápoj A, druhá firma nápoj B. Výzkumem bylo zjištěno, že zákazník, který si koupí nápoj A, si tento nápoj koupí i příště s pravděpodobností 0,9. Jestliže si zákazník koupí poprvé nápoj B, potom pravděpodobnost, že si jej koupí i příště, je 0,7. Dále bylo zjištěno, že 80% zákazníků si napoprvé vybírá nápoj B. Obě firmy zajímá:

a) **Kolik zákazníků si koupí jejich nápoj při druhém, třetím a dalších nákupech?**

b) **Jakou část trhu mohou ovládnout?**

Dané pravděpodobnosti: 0,9 a 0,1; respektive 0,7 a 0,3 zapíšeme do matice P, kterou nazýváme *maticí přechodu*, a která má součet prvků v každém sloupci rovný jedné:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Počáteční stav je popsán sloupcovým stavovým vektorem $S_0 = (0{,}2; 0{,}8)^T$. Následující stav S_1 získáme ze stavu S_0 tak, že S_0 vynásobíme zleva maticí P: $S_1 = P \cdot S_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$. Stav S_2 získáme opět násobením maticí P zleva: $S_2 = P \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}552 \\ 0{,}448 \end{pmatrix}$, analogicky $S_3 = \begin{pmatrix} 0{,}6312 \\ 0{,}3688 \end{pmatrix}$, $S_4 = \begin{pmatrix} 0{,}6787 \\ 0{,}3213 \end{pmatrix}$, $S_5 = \begin{pmatrix} 0{,}7072 \\ 0{,}2928 \end{pmatrix}$, atd.

Obecně platí, že $S_n = P^n \cdot S_0$, nemusíme tedy k získání například stavu S_{10} počítat všechny stavy předchozí, stačí spočítat „jen“ P_{10}. Stavy S_i se nazývají *Markovovy řetězce* a náhodné procesy, v nichž záleží pouze na pravděpodobnostech určených maticí přechodu a stavu bezprostředně předcházejícím jsou tzv. *Markovovy procesy.*

Pokud je matice P čtvercová a její prvky p_{ij} splňují podmínky:

$$\sum_i p_{ij} = 1 \wedge p_{ij} > 0 \text{ pro každé n},$$

konverguje posloupnost stavů S_i k jistému *stacionárnímu stavu* S. Pro tento ustálený stav zřejmě platí $S \cdot P = S$, a pokud označíme $S = (a, b)^T$, pak souřadnice S získáme řešením soustavy:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

a po roznásobení:

$$a = 0{,}9a + 0{,}3b$$
$$b = 0{,}1a + 0{,}7b$$

Z první rovnice plyne $a = 3b$, druhá rovnice není nezávislá, proto je druhou podmínkou rovnost $a + b = 1$ (součet pravděpodobností úplného systému jevů je roven 1). Řešením je vektor $S = (a, b) = (0{,}75; 0{,}25)$.

Ať tedy na začátku nakupují zákazníci jakýkoli nápoj, po určité době se situace na trhu ustálí a 75% zákazníků bude kupovat nápoj A a pouze 25% zákazníků nápoj B.

Zdatnější žáci se mohou na závěr pokusit najít obecné řešení problému s maticí přechodu $\begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}$. Řešením je vektor

$$S = \left(\frac{q}{1-p+q}, \frac{1-p}{1-p+q}\right)^T.$$

4. Podle fiktivního Ústavu pro studium počasí je pravděpodobnost, že po jasném dni bude následovat jasný den rovna 0,6; pravděpodobnost, že po jasném dni bude zataženo 0,3, a pravděpodobnost, že po jasném dni bude déšť 0,1 (viz následující tabulka, druhý sloupec). Podobně byly zjištěny i pravděpodobnosti pro den následující po dni se zataženou oblohou a po dni s deštěm (viz sloupce číslo 2 a 3 v Tab. 1). Dnes je jasno. Určete, jak bude v následujících dnech.

	jasno	zataženo	déšť
jasno	0,6	0,2	0,1
zataženo	0,3	0,5	0,4
déšť	0,1	0,3	0,5

Tyto pravděpodobnosti mohou být místo tabulky zapsány opět do *matice přechodu* P:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Součet pravděpodobností v každém sloupci je 1 (jde o úplný systém jevů). Podle zadání je na počátku jasno, tento počáteční stav S_0 lze zapsat jako sloupcový vektor: $S_0 = (1,0,0)^T$. Při výpočtu následujících stavů postupujeme obdobně jako v předešlé úloze:

$$S_1 = P \cdot S_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = P \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}43 \\ 0{,}37 \\ 0{,}20 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0{,}352 \\ 0{,}394 \\ 0{,}254 \end{pmatrix}, \qquad S_4 = \begin{pmatrix} 0{,}3154 \\ 0{,}4042 \\ 0{,}2804 \end{pmatrix}, \text{ atd.}$$

Takto můžeme pokračovat ve výpočtu pravděpodobností typů počasí i v dalších dnech. Vektory S_i opět konvergují ke stacionárnímu stavu $S = (0{,}283; 0{,}413; 0{,}304)^T$. Podle našeho „modelu" je tedy nejpravděpodobnějším počasím v dlouhodobém měřítku kategorie „zataženo" s pravděpodobností asi 41,3 %.

Užitečnost matic v matematice, fyzice nebo ekonomii je natolik zásadní, že je zbytečné se o ní šířeji rozepisovat. Úlohy č. 3 a 4 pocházejí (v mírně odlišné podobě) z [1], kde lze najít mnoho dalších zajímavých aplikací matic. Základní přehled o Markovových řetězcích poskytuje například Wikipedie, viz [2] a [3].

Literatura

[1] Stewart, J. et al., *Finite Mathematics – The McGraw-Hill Ryerson Mathematics Program*, Canada, McGraw-Hill Ryerson Limited, 1988.

[2] Wikipedia. [online], [cit. 2009-07-06]. Dostupné na WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Markovovuv_řetězec.

[3] Wikipedia. [online], [cit. 2009-07-06]. Dostupné na WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Markov_Chain.

Mgr. Jiří Mazurek
Gymnázium a SOŠ Orlová - Lutyně
Masarykova tř. 1313
735 14 Orlová - Lutyně
e-mail: jiri.mazurek@gym-orlova.cz