Jiří Kuchta

Modifikace Eukleidových vět a věty Pythagorovy pro obecné trojúhelníky

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 3, 155–159

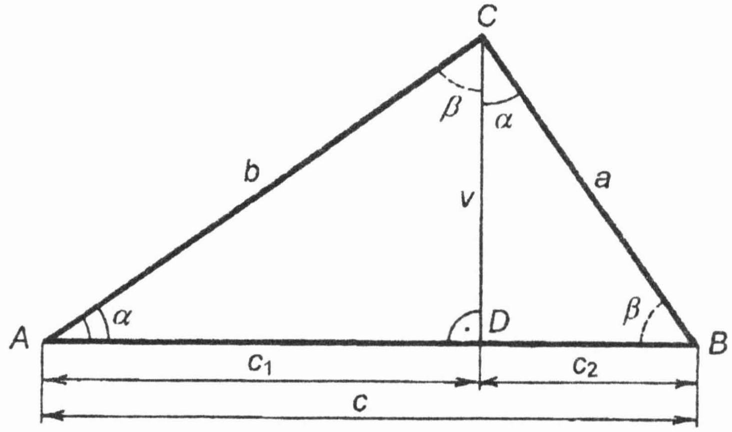
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150526`

MODIFIKACE EUKLEIDOVÝCH VĚT A VĚTY PYTHAGOROVY PRO OBECNÉ TROJÚHELNÍKY

JIŘÍ KUCHTA

Všimneme-li si klasických důkazů Eukleidových vět a Pythagorovy věty, může nás napadnout aplikovat tento postup i pro obecné trojúhelníky.

Připomeňme nejdříve zmíněné důkazy.



V označení podle obr. 1 platí podle věty (uu) o podobnosti trojúhelníků pro pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD$$
$$\triangle ABC \sim \triangle CBD$$
$$\triangle ACD \sim \triangle CBD$$

Odtud vyplývá:

$$\frac{b}{c_1} = \frac{c}{b} \quad \text{neboli} \quad b^2 = c \cdot c_1 \tag{1}$$

$$\frac{a}{c_2} = \frac{c}{a} \quad \text{neboli} \quad a^2 = c \cdot c_2 \tag{2}$$

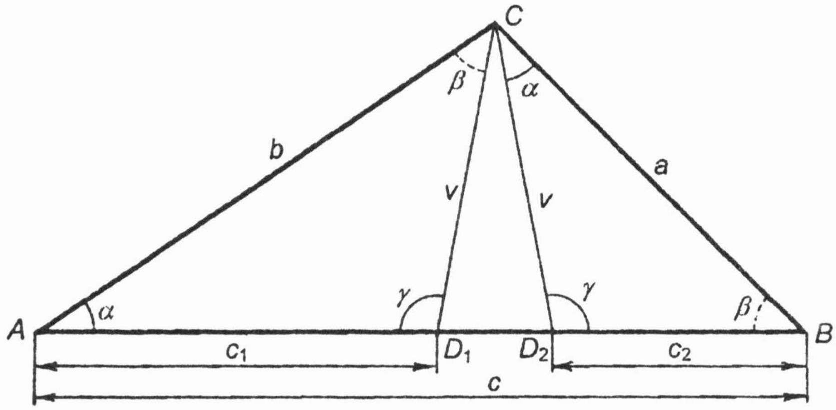
$$\frac{c_1}{v} = \frac{v}{c_2} \quad \text{neboli} \quad v^2 = c_1 \cdot c_2 \tag{3}$$

Sečtením rovností (1) a (2) dostaneme

$$a^2 + b^2 = c \cdot (c_1 + c_2) \tag{4}$$

Protože $c_1 + c_2 = c$, vyjadřuje rovnost (4) pythagorejskou rovnost

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



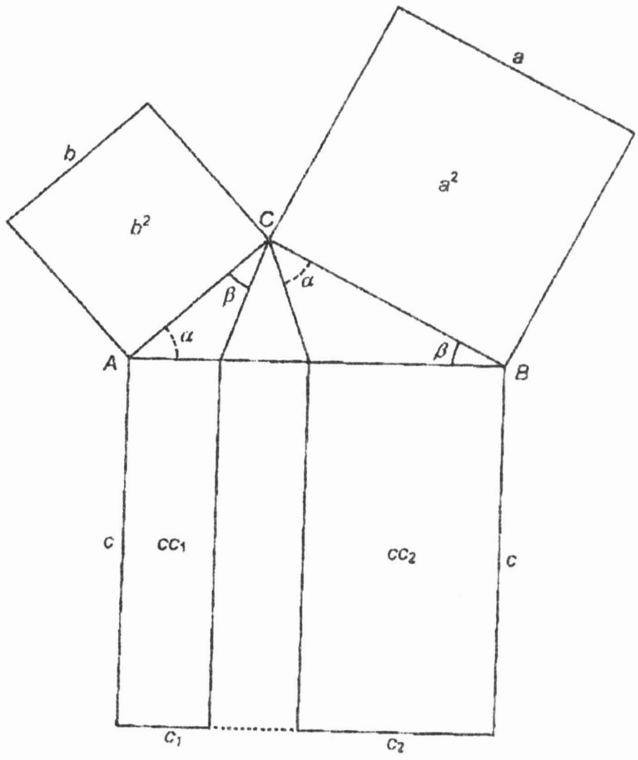
Je-li v trojúhelníku ABC u vrcholu C úhel tupý, můžeme sestrojit místo bodu D body D_1, D_2 podle obr. 2 tak, že platí: úhel ACD_1 má velikost β a úhel BCD_2 má velikost α. Protože součet úhlů v trojúhelníku je 180°, jsou úhly CD_1A, CD_2B a ACB shodné a jejich velikost označme γ. Trojúhelník D_1CD_2 je tedy rovnoramenný a podle věty (uu) o podobnosti trojúhelníků platí:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD_1$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD_2$$

$$\triangle ACD_1 \sim \triangle CBD_2$$

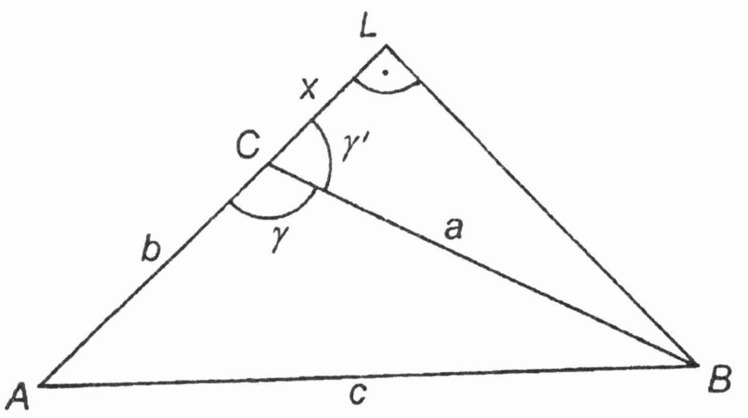
Z těchto podobností plynou rovnosti (1), (2), (3), (4), které jsme odvodili pro pravoúhlý trojúhelník, a které je možné v označení podle obr. 2 považovat za tvrzení Eukleidových vět a věty Pythagorovy pro tupoúhlý trojúhelník. Interpretujeme-li čísla a_2, b_2, cc_1 a cc_2 jako obsahy čtverců a obdélníků, můžeme Pythagorovu větu pro tupoúhlý trojúhelník ilustrovat obrázkem 3.



Obsah c^2 čtverce nad stranou c proti tupému úhlu γ v trojúhelníku ABC je tedy větší než součet obsahů $a^2 + b^2$ nad zbývajícími stranami. O kolik je tento čtverec větší než $a^2 + b^2$ můžeme určit např. takto: sestrojíme-li podle obr. 4 z bodu B kolmici na přímku AC, dostaneme bod L a platí podle Pythagorovy věty $|AB|^2 = |AL|^2 + |BL|^2$, neboli

$$c^2 = (b + x)^2 + a^2 - x^2.$$

Tuto rovnost upravíme na tvar $c^2 = a^2 + b^2 + 2bx$, kde $x = a \cdot \cos\gamma$. Tím jsme ovšem odvodili kosinovou větu $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$.



Toto zobecnění Pythagorovy věty znal již Eukleides, který ovšem nepoužíval v zápisu funkci kosinus.

Pro ostroúhlé trojúhelníky postupujeme analogicky, platí však $a^2 + b^2 > c^2$.

Známý vzorec pro obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC můžeme v označení podle obr. 1 psát ve tvaru

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}cv$$

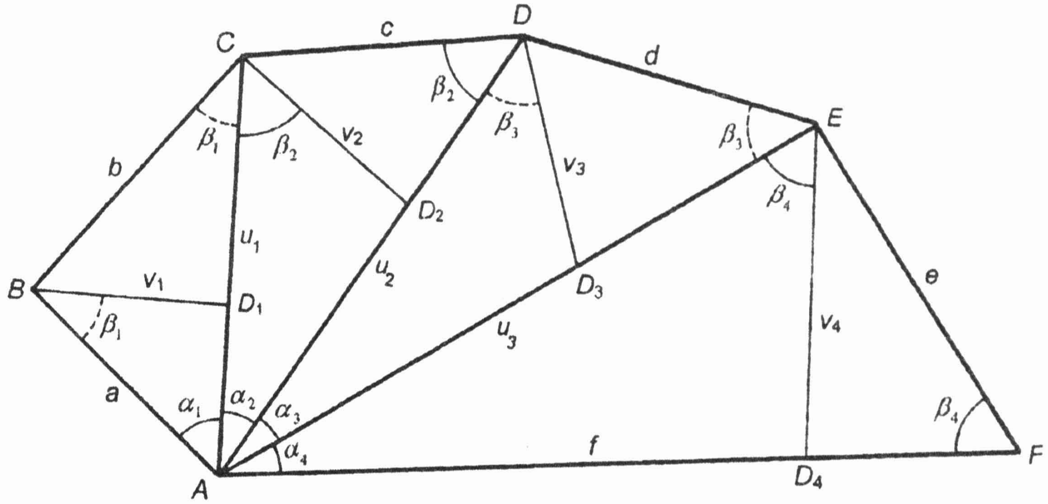
z něhož plyne rovnost

$$a \cdot b = c \cdot v, \tag{5}$$

kterou můžeme psát ve tvaru

$$\frac{b}{v} = \frac{c}{a}, \tag{5'}$$

Tato rovnost vyplývá nejen z podobnosti trojúhelníků ABC, ACD, podle obr. 1, ale i z podobnosti trojúhelníků ABC, ACD_1, podle obr. 2. Rovnost (5) platí tedy pro libovolný trojúhelník. My jsme to zde dokázali jen pro trojúhelník tupoúhlý – ale pro ostroúhlé trojúhelníky lze postupovat podobně. Rovnost (5) lze rozšířit i na mnohoúhelníky. Pro šestiúhelník na obr. 5 můžeme postupovat následujícím způsobem.



Rovnost (5) aplikujeme postupně na trojúhelníky ABC, ACD, ADE, AEF, na něž dělí šestiúhelník $ABCDEF$ jeho úhlopříčky $AC = u_1$, $AD = u_2$, $AE = u_3$. Dostaneme tak

$$a \cdot b = u_1 \cdot v_1$$

$$c = \frac{u_2 \cdot v_2}{u_1}$$

$$d = \frac{u_3 \cdot v_3}{u_2}$$

$$e = \frac{v_4 \cdot f}{u_3}$$

Znásobíme-li levé i pravé strany těchto rovností, dostaneme po úpravě výsledek

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 \cdot f, \tag{6}$$

který můžeme považovat za zobecnění vztahu (5) pro šestiúhelník $ABCDEF$.

Jiří Kuchta
Na pláni 13
150 00 Praha 5