Stanislav Lukáč

Využívanie dôkazov pre hlbšie porozumenie poznatkov vo výučbe matematiky

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 3, 145–154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150525

VYUŽÍVANIE DÔKAZOV PRE HLBŠIE POROZUMENIE POZNATKOV VO VÝUČBE MATEMATIKY

STANISLAV LUKÁČ

Úvod

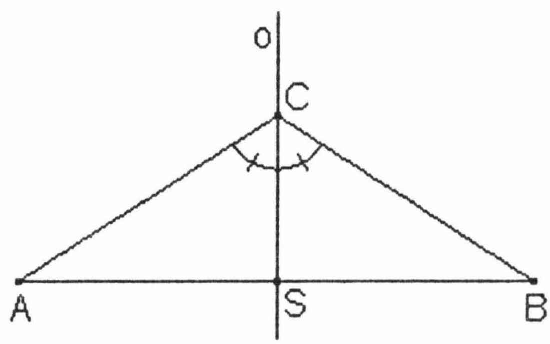
Zdôvodňovanie a dokazovanie patrí medzi základné piliere matematiky ako vednej disciplíny. V *Oxford American Dictionary* (1980) sa význam slova dôkaz vysvetľuje ako „preukázanie pravdivosti niečoho". Hlavným zámerom matematika je v dôkaze ukázať, že príslušná matematická veta je pravdivá. Tvorba hypotéz a ich zdôvodňovanie patrí medzi dôležité myšlienkové aktivity aj vo vyučovaní matematiky. Podľa Kuřinu a Půlpána [5] dokazovanie patrí medzi päť základných umení, ktoré je potrebné rozvíjať vo vyučovaní matematiky. Aj z hľadiska konštruktivistických prístupov k vyučovaniu matematiky stanovili Hejný a Kuřina [2] ako jednu z podstatných zložiek matematickej aktivity: „hľadanie súvislostí, riešenie úloh a problémov, tvorbu pojmov, zovšeobecňovanie tvrdení, ich preverovanie a zdôvodňovanie". Vo vyučovaní matematiky sa v súvislosti s dôkazmi vynárajú do popredia aj ďalšie aspekty charakteristické pre matematické vzdelávanie. Ako zdôrazňuje Knuth [3], vo vyučovaní matematiky je dôležité uvádzať dôvody, pomocou ktorých sa vysvetľuje, prečo je veta pravdivá. Dôraz by teda nemal byť kladený na technické detaily dôkazov, ale na výbere vhodných argumentov a spôsobov vysvetlenia pravdivosti tvrdení, ktoré by mohli byť vhodne doplnené aj grafickými reprezentáciami skúmaných objektov a vzťahov. Vhodne zaradené dôkazy do výučby matematiky pomáhajú žiakom priblížiť podstatu matematiky.

Pre vyprovokovanie aktivity žiakov smerujúcej k overovaniu pravdivosti a dokazovaniu by sa nemali žiakom často predkladať hotové matematické tvrdenia. Žiaci dopredu nadobúdajú presvedčenie, že predložené tvrdenie musí byť pravdivé, čo môže vyvolať stratu záujmu o hlbšie skúmanie problému. Žiaci by mali najprv preskúmať problém, hľadať zákonitosti a vyslovovať domnienky. Proces dokazovania matematickej vety vyžaduje prechod cez viaceré úrovne pochopenia reprezentované rozličnými matematickými aktivitami: hľadanie odpovedí na otázky vyslovené pri skúmaní problému, formulovanie hypotézy, hľadanie vhodných argumentov pre jej zdôvodňovanie, dokazovanie, kritické zhodnotenie dôkazu, akceptovanie pravdivosti vety. Uvedené učebné aktivity umožňujú hlbšie porozumenie matematických poznatkov a rozvoj logického a kritického myslenia. Ako uvádzajú Kuřina a Půlpán [5]: „K porozumeniu môže dôjsť len vtedy, ak sa začne študent o učivo zaujímať, ak zaujme aktívny postoj k učeniu, ak si kladie aspoň vnútorne vhodné otázky a hľadá na ne odpovede.“ Na ilustráciu niektorých aspektov spojených s využívaním dôkazov vo vyučovaní matematiky využijeme vetu o vlastnosti osi vnútorného uhla v trojuholníku. Žiakom by mohol byť predložený nasledovný problém: *V trojuholníku ABC pretína os vnútorného uhla pri vrchole C protiľahlú stranu trojuholníka v bode P. Nájdite a dokážte vzťah medzi dĺžkami úsečiek AP, PB a dĺžkami strán obsahujúcich vrchol C.*

Skúmanie a dôkaz špeciálneho prípadu

V úvodnej etape riešenia problému je užitočné zostrojovať konkrétne objekty a zamerať sa na špeciálne prípady, ktoré môžu uľahčiť pochopenie problematiky. Takýto pokus o hľadanie riešenia nazýva Kopka [4] konkretizácia. Aj keď táto stratégia nemusí viesť priamo k riešeniu problému, vhodne zvolené konkrétne prípady môžu pomôcť objaviť dôležité súvislosti.

V našom probléme navrhujeme úvodné skúmanie zamerať na špeciálny prípad: *Ak v trojuholníku ABC prechádza os vnútorného uhla pri vrchole C stredom strany AB, čo platí pre tento trojuholník?* Žiaci by mali dobre poznať skutočnosť, že v rovnoramennom trojuholníku je os základne zároveň aj osou vnútorného uhla oproti základni. Preto po načrtnutí trojuholníka ABC a osi vnútorného uhla pri vrchole C možno očakávať rýchle nájdenie odpovede na položenú otázku. Zaujímavé je však zdôvodnenie, že len rovnoramenné trojuholníky majú vlastnosť vyšetrovanú v špeciálnom prípade. Na obrázku 1 je načrtnutý trojuholník ABC, v ktorom os vnútorného uhla pri vrchole C prechádza stredom strany AB.



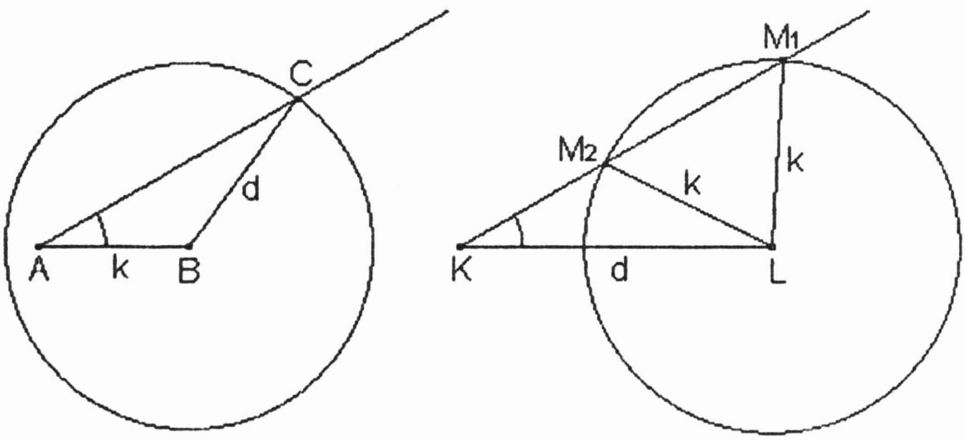
Obr. 1

Na zdôvodnenie hypotézy, že trojuholník ABC je potom rovnoramenný, možno využiť zhodnosť trojuholníkov. V trojuholníkoch ASC a BSC platí: $|AS| = |SB|$ a $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BCS|$. Keďže strana SC je spoločná pre obidva trojuholníky, využitím vety Ssu možno vyvodiť, že trojuholníky ASC a BSC sú zhodné a preto $|AC| = |BC|$.

Pri kritickom vyhodnocovaní korektnosti riešenia špeciálneho prípadu využijeme postup, ktorý opisujú Daepp a Gorkin [1]. Pri riešení problémov a zdôvodňovaní výsledkov je potrebné zodpovedať a pochopiť odpovede na tri základné otázky:

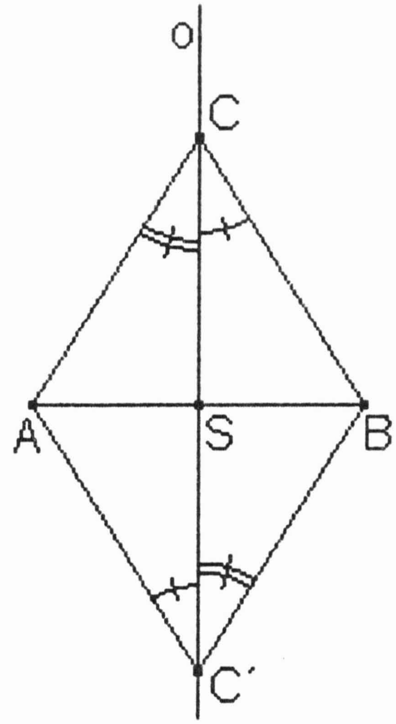
- ako urobiť niečo,
- prečo to funguje,
- kedy to funguje.

Pochybnosti do zdôvodnenia riešenia špeciálneho prípadu môže priniesť hľadanie odpovede na tretiu otázku. Po opätovnom preskúmaní obrázka 1 možno vidieť, že ak by bol bod C umiestnený do takej pozície na osi uhla o, že by bola splnená nerovnosť $|SC| >$ $> |AS|$, získali by sme ostrouhlý trojuholník ABC. Ak teraz skontrolujeme zdôvodnenie riešenia špeciálneho prípadu, tak zistíme, že vetu Ssu nemožno využiť, lebo uhly s rovnakou veľkosťou ležia oproti kratším stranám v trojuholníkoch ASC a BSC. V učebniciach matematiky sa uvádzajú štyri vety o zhodnosti trojuholníkov, ale veta ssu medzi nimi nie je. Z obrázka 2 je zrejmé, že ak sa trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a uhle oproti dlhšej z nich, možno ich jednoznačne zostrojiť a všetky sú navzájom zhodné. Ak leží rovnaký uhol oproti kratšej strane, trojuholník sa nemusí dať zostrojiť, alebo môžu existovať dva rôzne trojuholníky, ktoré evidentne nie sú zhodné.



Obr. 2

Uvedené argumenty ešte nemusia znamenať, že riešenie špeciálneho prípadu nie je správne. V našom prípade je to výzva pre hľadanie argumentov na zdôvodnenie správnosti riešenia pre všetky prípady vyšetrovaných trojuholníkov ABC. Pri dôkaze využijeme vlastnosti uhlov vytvorených dvojicou rovnobežných priamok preťatých rôznobežnou priamkou a vlastnosti základných geometrických útvarov. Keďže bod S je stred strany AB, možno po zostrojení obrazu bodu C v stredovej súmernosti určenej stredom S získať bod C a doplniť tak trojuholník ABC na rovnobežník $ACBC$. Vzhľadom na skutočnosť, že pre veľkosti uhlov platí: $|\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle SCA|$ a $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle SCB|$ sú trojuholníky CCA a CCB rovnoramenné. Na základe tohto faktu a vlastnosti protiľahlých strán rovnobežníka platí, že rovnobežník $ACBC$ je kosoštvorec (pozri obrázok 3). Trojuholník ABC je teda rovnoramenný a os vnútorného uhla ACB je aj osou strany AB.

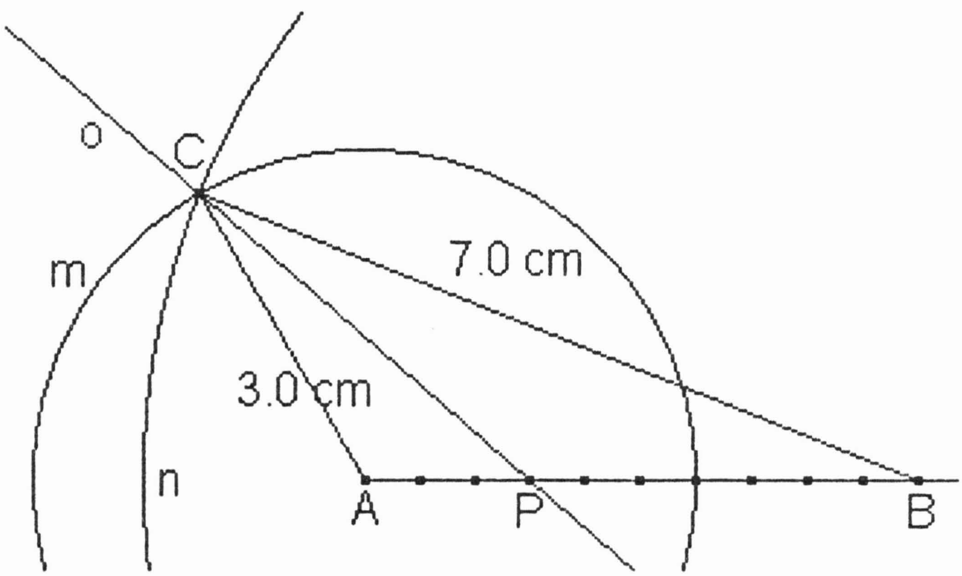


Obr. 3

Riešenie problému

Vráťme sa k riešeniu úvodného problému. Zistili sme, že len v rovnoramenných trojuholníkoch ABC so základňou AB prechádza os o vnútorného uhla pri vrchole C stredom strany AB. Kde sa bude nachádzať priesečník osi o so stranou AB (pomenovaný P), ak trojuholník ABC nebude rovnoramenný? Pri hľadaní odpovede na položenú otázku by mohlo žiakom pomôcť zostrojenie niekoľkých konkrétnych trojuholníkov. Pre urýchlenie tejto výskumnej aktivity by sa dali vhodne využiť aj dynamické geometrické systémy (napr. program Cabri Geometry). Pomocou nich možno rýchlo preskúmať mnoho konkrétnych prípadov a pre žiakov môže byť jednoduchšie a dostupnejšie vyslovovanie domnienok typu: čím je jedna strana trojuholníka kratšia v porovnaní s druhou stranou, tým je bod P bližšie k vrcholu patriacemu kratšej strane.

K presnejšej lokalizácii polohy bodu P možno žiakov naviesť pomocou nasledovnej konštrukcie, v ktorej budú žiaci nasmerovaní na skúmanie pomerov dĺžok úsečiek. *Zostrojte trojuholník* ABC *s dĺžkou strany* $AB = 5\,cm$ *a s celočíselnými dĺžkami strán* AC, BC *tak, aby platilo* $|AC| + |BC| = 10\,cm$ *a rozdeľte stranu* AB *na desať rovnakých častí. Zostrojte priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole* C *so stranou* AB *a charakterizujte jeho polohu na strane* AB. Pre dĺžky strán AC, BC možno voliť dvojice: $(1,9)$, $(2,8)$, $(3,7)$, $(4,6)$, ... Pre niektoré dvojice celých čísel nebude existovať príslušný trojuholník ABC (z uvedených sú to dvojice $(1,9)$ a $(2,8)$). Pri zostrojovaní trojuholníkov s opísanými vlastnosťami by vhodne vytvorená dynamická konštrukcia v programe Cabri Geometry mohla pomôcť žiakom jednoduchšie preskúmať viacero konkrétnych prípadov. Na obrázku 4 je zostrojený prípad, keď $|AC| = 3\,\text{cm}$ a $|BC| = 7\,\text{cm}$.



Obr. 4

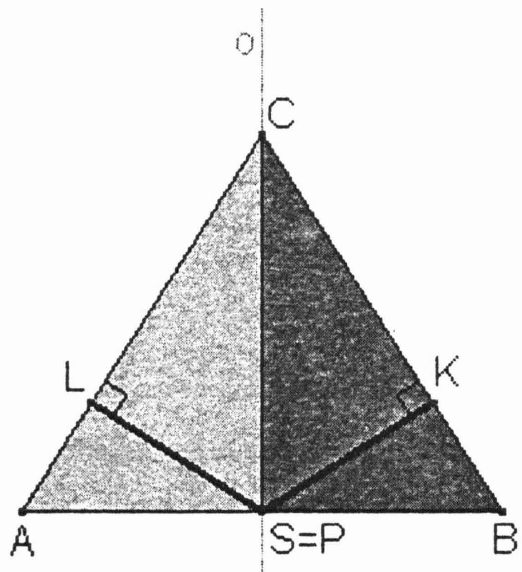
Po vyskúšaní niekoľkých konkrétnych prípadov by žiaci mali vedieť charakterizovať vzťah medzi pomermi dĺžok úsečiek AC, BC a AP, PB. Tento vzťah možno sformulovať do nasledovnej matematickej vety:

Veta 1. V trojuholníku ABC rozdeľuje os vnútorného uhla protiľahlú stranu na dve časti, pomer dĺžok ktorých sa rovná pomeru dĺžok priľahlých strán trojuholníka ABC.

Dôkaz vety

Pre rovnoramenné trojuholníky už bolo dokázané, že bod $P = S$ a preto veta 1 pre rovnoramenné trojuholníky evidentne platí. Prechod od rovnoramenných trojuholníkov k všeobecným môže byť pre žiakov pomerne náročný. Ak žiaci nemajú dosť skúseností so zdôvodňovaním tvrdení, ťažko možno od nich očakávať rigorózny matematický dôkaz. Jedna z ciest, ako uľahčiť žiakom dôkaz všeobecnej matematickej vety, je vysvetlenie kľúčovej myšlienky dôkazu. V literatúre možno nájsť viacero rozdielnych dôkazov vety 1 založených na rôznych matematických vzťahoch. Spomenuli by sme podobnosť trojuholníkov, obsah trojuholníkov a sínusovú vetu. Vzhľadom na vedomostnú bázu využívanú v jednotlivých dôkazoch je podľa nášho názoru pre žiakov najvhodnejší dôkaz založený na porovnávaní obsahov trojuholníkov. Pre vysvetlenie kľúčovej myšlienky dôkazu znova využijeme špeciálny prípad z úvodnej časti. Základ ponúkanej pomoci je nákres rovnoramenného trojuholníka ABC na obrázku 5 s ďalšími vykreslenými útvarmi a pokyn aby žiaci vyjadrili rôznymi spôsobmi obsahy trojuholníkov ASC a BSC a porovnali ich veľkosť.

Trojuholníky ASC a BSC sú zhodné, preto majú rovnaký obsah. Na jeho vyjadrenie možno využiť dĺžky strán AS, SB a SC ale aj AC, LS a BC, SK. Žiaci by si mali uvedomiť rôzne spôsoby argumentácie pri zdôvodňovaní skutočnosti, že $|LS| = |SK|$ (napr. rovnaké obsahy trojuholníkov ASC a BSC, zhodnosť trojuholníkov SLC a SKC na základe vety *usu*). Vzhľadom na vzťahy vystupujúce vo vete 1 je dôležitý argument, že bod S leží na osi uhla a preto má od ramien uhla rovnakú vzdialenosť. Rozdielne spôsoby vyjadrenia obsahu trojuholníkov, na ktoré je trojuholník ABC rozdelený osou o vnútorného uhla pri vrchole C a vyhodnotenie vplyvu zmeny tvaru trojuholníka ABC na vzťahy medzi vyšetrovanými objektmi tvorí základnú líniu dôkazu. Na obrázku 6 je zobrazený všeobecný trojuholník ABC s osou o vn-



Obr. 5

útorného uhla pri vrchole C s vyznačenými vzdialenosťami bodu P od ramien uhla, na ktorých ležia strany AC a BC.

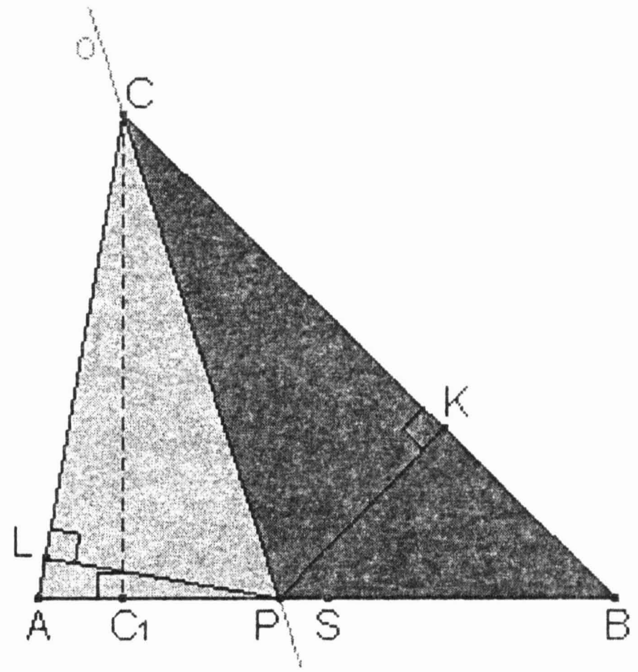
Keďže výšky trojuholníkov APC a PBC spustené z vrcholu C na stranu AB sú totožné, potom pre pomer obsahov týchto trojuholníkov platí:

$$\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{|AP|}{|PB|} \tag{2}$$

Obsahy týchto trojuholníkov možno vyjadriť aj pomocou dĺžok strán AC, BC a výšok zostrojených z bodu P na priamky obsahujúce uvedené strany trojuholníka ABC. Keďže bod P leží na osi o vnútorného uhla pri vrchole C, tak výšky LP a PK majú rovnakú dĺžku. Pre pomer obsahov trojuholníkov APC a PBC platí aj vzťah:

$$\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{|AC|}{|BC|} \tag{3}$$

Porovnaním vzťahov (2) a (3) dostávame rovnosť: $\dfrac{|AP|}{|PB|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$.



Obr. 6

Táto rovnosť vyjadruje tvrdenie vety 1, ktorú sme týmto spôsobom dokázali.

Záver

V článku sme sa snažili prezentovať námet, ktorý by mohol podnecovať žiakov k objavovaniu nových vzťahov medzi geometrickými útvarmi a prispievať k rozvíjaniu schopností žiakov využívať vhodné argumenty pre zdôvodňovanie svojich zistení. Riešenie uvedeného problému nevyžaduje zložité konštrukcie ani náročné matematické úvahy. Pri jeho riešení a dokazovaní správnosti výsledkov sa využívajú vlastnosti základných geometrických útvarov a geometrické vzťahy, ktoré sú súčasťou školskej matematiky. Vzhľadom na charakter problému a opísané metódy riešenia vidíme možnosti jeho využitia vo vyučovaní matematiky v prvom ročníku na strednej škole, prípadne na matematických krúžkoch a seminároch aj na základnej škole v rámci práce s talentovanými žiakmi. Skúmanie vzťahov medzi objektmi, vyslovovanie domnienok, zovšeobecňovanie objavených súvislostí a dokazovanie sformulovaných tvrdení by malo spoločne tvoriť vo vyučovaní matematiky komplexný proces umožňujúci pochopenie matematických poznatkov.

Literatura

[1] Daepp, U., Gorkin, P., *Reading, Writing, and Proving*, Springer Science+Business Media, Inc., 2003.

[2] Hejný, M. a kol., *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Univerzita Karlova v Praze, 2004

[3] Knuth, E., J., *Proof as a Tool for Learning Mathematics*, Mathematics Teachers 95, no. 7, october 2002.

[4] Kopka, J., *Zkoumání ve školské matematice*, Katolícka univerzita v Ružomberku, 2006

[5] Kuřina, F., Půlpán, Z., *Podivuhodný svět elementární matematiky*, Academia Praha, 2006

RNDr. Stanislav Lukáč, PhD.
Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach
Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: stanislav.lukac@upjs.sk