Učitel matematiky

Emil Calda

Pár úloh na dělitelnost aneb K čemu se též dají použít rozklady $a^n \pm b^n$

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 1, 25–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150474

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2002

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

PÁR ÚLOH NA DĚLITELNOST

aneb

K ČEMU SE TÉŽ DAJÍ POUŽÍT ROZKLADY $a^n \pm b^n$

EMIL CALDA

Rozklady dvojčlenů $a^3 \pm b^3$ se na střední škole běžně používají při úpravách všelikých výrazů, ale málokteří studenti vědí, že podobným způsobem se pro každé liché n dají rozložit i dvojčleny $a^n \pm b^n$. Ještě menšímu počtu je pak známo, že rozklad těchto dvojčlenů se dá využít při zkoumání dělitelnosti celých čísel. Pokud chceme a máme čas, můžeme je s tím seznámit např. v rámci partie o geometrické posloupnosti. Vzorce

$$a^n \pm b^n =$$
$$= (a \pm b)(a^{n-1} \mp a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \mp a^{n-4}b^3 + \ldots \mp ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

které platí pro všechna lichá přirozená n, mohou totiž získat tak, že určí součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem a^{n-1} a kvocientem $-\frac{b}{a}$, resp. $\frac{b}{a}$.

Za předpokladu, že n je liché a $a \neq 0$, dostanou pro $a \neq -b$

$$a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n + b^n}{a+b}.$$

a pro $a \neq b$

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}.$$

Odtud už je vidět, že výše uvedené vzorce pro rozklad výrazů $a^n \pm b^n$, kde n je liché přirozené číslo, vskutku platí, a to i v případech $a = 0$, $a = b$, $a = -b$, které byly původně vyloučeny. Uvědomí-li si nyní, že pro celá čísla a, b představují výrazy

$$a^{n-1} \mp a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \mp a^{n-4}b^3 + \ldots \mp ab^{n-2} + b^{n-1}$$

celá čísla, dojdou k závěru, že pro libovolná celá čísla a, b a každé liché číslo n platí:

$$a^n + b^n = (a+b) \cdot k_1 , \qquad a^n - b^n = (a-b) \cdot k_2 ,$$

kde k_1, k_2 jsou celá čísla.

Znamená to, že *součet (rozdíl) mocnin každých dvou celých čísel s týmž lichým exponentem je dělitelný součtem (rozdílem) těchto čísel.*

Ukážeme si několik příkladů, ve kterých se tyto výsledky uplatní. Dokážeme následující tvrzení:

(a) číslo $56^{41} - 37^{31}$ je dělitelné devatenácti;

(b) číslo $103^{53} - 53^{103}$ je dělitelné třemi, čtyřmi, třinácti;

(c) číslo $43^{17} + 17^{43}$ je dělitelné dvanácti.

V případě (a) si rozdíl $56^{41} - 37^{31}$ představíme ve tvaru

$$(56^{41} + 1^{41}) - (37^{31} + 1^{31})$$

a použitím věty o součtu lichých mocnin s týmž exponentem dostaneme následující rovnosti, ve kterých k_1, k_2, k_3 jsou celá čísla:

$$56^{41} - 37^{31} = (56^{41} + 1) - (37^{31} + 1) = (56+1)k_1 - (37+1)k_2 =$$

$$= 57k_1 - 38k_2 = 19(3k_1 - 2k_2) = 19k_3 ;$$

tím je tvrzení (a) dokázáno.

Při důkazu (b) postupujeme podobně:

$$103^{53} + 53^{103} = (103^{53} + 1) + (53^{103} - 1) = 104k_1 + 52k_2 =$$

$$= 52(2k_1 + k_2) = 4.13k_3 ,$$

kde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$; dané číslo je tedy dělitelné čtyřmi a třinácti. To, že je dělitelné i třemi, plyne z následujícího:

$$103^{53} + 53^{103} = (103^{53} - 1) + (53^{103} + 1) = 102k_4 + 54k_5 =$$

$$= 3(34k_4 + 18k_5) = 3k_6 \ ,$$

kde $k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{Z}$.

V důkazu (c) se objevují „nové obraty":

$$43^{17} + 17^{43} = (43^{17} + 17^{17}) + (17^{43} - 17^{17}) =$$

$$= 60k_1 + 17^{17}(17^{26} - 1) = 60k_1 + 17^{17}(289^{13} - 1) =$$

$$= 60k_1 + 17^{17}.288k_2 = 12(5k_1 + 17^{17}.24k_2) = 12k_3 \ ,$$

kde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

K tomu, abychom zvládli širší spektrum úloh, je nutno vědět, že *rozdíl mocnin každých dvou celých čísel s týmž sudým exponentem je dělitelný součtem i rozdílem těchto čísel:*

Pro libovolná celá čísla a, b a každé sudé číslo n platí:

$$a^n - b^n = (a+b)(a-b) \cdot k \ ,$$

kde k je celé číslo.

Toto tvrzení se dá odvodit ze součtu

$$a^{n-2} + a^{n-4}b^2 + a^{n-6}b^4 + \ldots + a^2b^{n-4} + b^{n-2} \ ,$$

kde n je sudé. Jde zřejmě o součet prvních $\frac{n}{2}$ členů geometrické posloupnosti s prvním členem a^{n-2} a kvocientem $\frac{b^2}{a^2}$; tento součet je za příslušných předpokladů roven

$$a^{n-2} \cdot \frac{(\frac{b^2}{a^2})^{\frac{n}{2}} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} = \frac{a^n - b^n}{(a+b)(a-b)} \ ,$$

odkud už výše uvedené tvrzení – podobným způsobem jako obě předcházející – vyplývá. S pomocí všech tří dokážeme, že platí:

(d) číslo $99^{61} - 50^{56}$ je dělitelné číslem 49;

(e) číslo $2222^{5555} + 5555^{2222}$ je dělitelné sedmi;

(f) pro každé přirozené n je číslo

$$4\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ krát}}3^{23} + 2\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ krát}}3^{43}$$

dělitelné číslem $6\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ krát}}6$.

Důkaz (d) je snadný:

$$99^{61} - 50^{56} = (99^{61} - 1) - (50^{56} - 1) = 98k_1 - 49k_2 =$$
$$= 49(2k_1 - k_2) = 49k_3 \ ,$$

kde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Dokázat (e) je poněkud obtížnější; zjistíme-li však, že čísla $2222 + 4$ a $5555 - 4$ jsou dělitelná sedmi, máme skoro vyhráno:

$$2222^{5555} + 5555^{2222} =$$
$$= (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}) =$$
$$= (2222 + 4)k_1 + (5555 - 4)k_2 - 4^{2222}(4^{3333} - 1) =$$
$$= 7 \cdot 318k_1 + 7 \cdot 793k_2 - 4^{2222}(64^{1111} - 1) =$$
$$= 7 \cdot 318k_1 + 7 \cdot 793k_2 - 4^{2222} \cdot 63k_3 = 7k_4 \ ,$$

kde $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

Postup při důkazu (e) je téměř evidentní; abychom však nemuseli u všech následujících čísel psát, že v jejich zápisu je n nul, domluvíme se na tom, že zápis $c_1 0 \ldots 0 c_2$, kde c_1, c_2 jsou nenulové číslice, bude představovat $(n+2)$-ciferné číslo. Dostaneme tak:

$$40\ldots03^{23} + 20\ldots03^{43} =$$
$$= (40\ldots03^{23} + 20\ldots03^{23}) + (20\ldots03^{43} - 20\ldots03^{23}) =$$
$$= 60\ldots06k_1 + 20\ldots03^{23} \cdot (20\ldots03^{20} - 1) =$$
$$= 60\ldots06k_1 + 20\ldots03^{23} \cdot 20\ldots02 \cdot 20\ldots04k_2 =$$

$$= 60...06k_1 + 20...03^{23} \cdot 20...02 \cdot 3k_3 \cdot k_2 =$$

$$= 60...06k_1 + 20...03^{23} \cdot 60...06 \cdot k_3.k_2 = 60...06k_4 \;,$$

kde $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

Další tři úlohy už řešit nebudeme. Přenecháváme je kolegům, kteří by svým svěřencům chtěli partii o dělitelnosti celých čísel ve smyslu tohoto článku rozšířit. Má se v nich dokázat, že platí:

(f) číslo $61^{29} + 89^{23}$ je dělitelné třiceti;

(g) číslo $43^{17} - 17^{43}$ je dělitelné deseti;

(h) pro každé přirozené n je číslo

$$5\underbrace{00...00}_{n \text{ krát}}3^{103} + 1\underbrace{00...00}_{n+1 \text{ krát}}3^{53}$$

dělitelné číslem $15\underbrace{00...00}_{n \text{ krát}}6$.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
email: calda@karlin.mff.cuni.cz