Antonín Slavík; Jiří Veselý
Funkcionální rovnice kdysi a dnes

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 67 (2022), No. 1, 24–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150395

Funkcionální rovnice kdysi a dnes

Antonín Slavík, Jiří Veselý

Abstrakt. Článek je věnován historii a možnostem využití funkcionálních rovnic. Obsahuje též podrobný seznam literatury pro zájemce o další studium této problematiky.

1. Na úvod

Zatímco poznatky v některých vědách velmi rychle stárnou a často ztrácejí platnost, v matematice se spíše vrší, občas zapomínají, ale dokázaná tvrzení zůstávají pravdivá. Zkoumání vývoje matematických disciplín je často velmi složité. O funkcionálních rovnicích již existuje několik obsáhlých monografií, ale v obecném povědomí nejsou příliš rozšířené. Přitom je i na relativně elementární úrovni mnoho lidí užívá, vždyť v definicích funkcí sudých, lichých či periodických s periodou $p > 0$ se vyskytují funkcionální rovnice

$$f(x) = f(-x), \qquad f(x) = -f(-x), \qquad f(x) = f(x+p), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Není snad třeba zdůrazňovat, že je množina všech řešení každé takové rovnice opravdu hodně veliká.

Bylo by patrně na místě začít tím, že bychom pojem funkcionální rovnice definovali, ale tomu se vyhneme – není to jednoduchá záležitost, zájemce může nahlédnout např. do [23], str. 25. Je vhodné si uvědomit, že centrální roli hraje pojem funkce, který se vyvíjel postupně po řadu staletí. Můžeme např. prohlásit, že bez něj není vlastně o čem mluvit a že tento pojem byl dostatečně přesně popsán teprve v 19. století Peterem G. L. Dirichletem (1805–1859). Stejně tak je možné tvrdit, že jeho kořeny sahají k počátkům našeho letopočtu či ještě podstatně dál. Nebudeme se proto snažit o vysokou přesnost a spokojíme se s poněkud vágním obecným chápáním užívaných pojmů a s typickými příklady, které zdaleka nevyčerpávají vývoj celé problematiky. V tomto duchu začneme pouze nepřesným vysvětlením: funkcionální rovnice je rovnice pro jednu či více neznámých funkcí. Řešením jsou funkce, které splňují danou rovnici pro všechny hodnoty proměnných z předepsaného definičního oboru. O funkcionálních rovnicích existuje řada prací a monografií, např. [1], [4], [20], [22], [23], [24], [33], [34], [36], [37], [44], píší se o nich i u nás kvalifikační práce, např. [21], [31], [40].

2. Historické poznámky

Začneme ve 13. století, i když někteří autoři poukazují na podstatně starší počátky této problematiky. Roku 1202 vyšla práce *Liber Abaci* Leonarda z Pisy (1180–1240),

---

Doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `slavik@karlin.mff.cuni.cz`, doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Kolínská 15/2272, 130 00 Praha 3 – Vinohrady, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

který je známější pod jménem Fibonacci. V ní se objevuje posloupnost Fibonacciho čísel

$$\{F_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\},$$

kterou popisujeme pomocí rekurentní rovnice

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Explicitní vyjádření Fibonacciho čísel objevil metodou generujících (vytvořujících) funkcí Abraham de Moivre (1667–1754), viz např. [43], str. 55. Vzorec

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

bývá nazýván po Jacquesovi P.-M. Binetovi (1786–1856), který jej znovuobjevil v 19. století. Definujeme-li $f(n) = F_n$, lze vztah $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ interpretovat jako funkcionální rovnici na $\mathbb{N}$ a posloupnost Fibonacciho čísel $\{F_n\}$ jako jedno z jejích řešení.

Postupme proudem historie dále. Nicole Oresme (asi 1320–1382), všestranně talentovaný a vzdělaný člověk, je mezi matematiky pravděpodobně nejznámější jako autor důkazu divergence harmonické řady, který nalezl asi kolem roku 1350. Jeho všestrannost a životní osudy jsou podrobně popsány v [7] či v [13], my se budeme věnovat jeho přínosu ke vzniku teorie funkcionálních rovnic. Vycházíme přitom z [3], i když další prameny, jako např. [34] nebo [46], popisují tuto látku podrobněji. Je třeba připomenout, že v originále je vše vyjádřeno slovně v termínech, které jsou naprosto odlišné od nyní užívaných. Linearita či lépe lineární funkce f je popsána tak, že pro každé tři body x, y, z, pro které je $x < y < z$, platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{f(y) - f(z)} = \frac{x - y}{y - z}.$$

Toto vyjádření[1] sice „nefunguje“ pro konstantní funkci f, což však snadno odstraníme úpravou na tvar

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Další úpravou pak dostaneme obvyklý „směrnicový“ tvar

$$f(x) = f(y) + \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,(x - y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

O další pokrok se zasloužili matematici a členové jezuitského řádu Gregorius a Sancto Vincentio (1584–1667) a Alphonse A. de Sarasa (1618–1667)[2], kteří dospěli k poznatku, že přirozený logaritmus vyhovuje na intervalu $(1, \infty)$ funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{L}$$

[1] Latinský Oresmův slovní popis i s anglickým překladem je uveden dosti podrobně v [2].

[2] A. de Sarasa byl Gregoriovým žákem. Gregorius pobýval v letech 1626–1632 v Praze jako kaplan Ferdinanda II. Mimochodem, z četby Gregoriova obsáhlého spisu, který vyšel roku 1647 v Antverpách, čerpal podněty i Gottfried W. Leibniz (1646–1716).

Přitom definovali (přirozený) logaritmus jako obsah plochy pod grafem funkce $y = 1/x$, tj. v dnešním označení vztahem

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Podrobnější výklad nalezne čtenář např. v hezké knize [14].

Při řešení problému rozšíření funkce faktoriál na interval $(0, \infty)$ nalezl Leonhard Euler (1707–1783) de facto jedno řešení funkcionální rovnice

$$f(x+1) = xf(x), \quad x \in (0, \infty), \tag{G}$$

kterým je funkce Γ splňující $\Gamma(n) = (n-1)!$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Viz známý text [5], jeho anglický překlad [6] nebo přehledové historické články [11], [42]. Euler vyjádřil funkci Γ nejprve ve formě nekonečného součinu a posléze dospěl i k jejímu integrálnímu vyjádření, které dnes zapisujeme ve tvaru

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Významným pramenem pro Eulerovy práce je Eulerův archiv [41], relevantní práce [15] je z roku 1755.

Augustin L. Cauchy (1789–1857) je autorem proslulé učebnice analýzy *Cours d'analyse* [9] (viz též anglický překlad [8]), která vznikla na základě jeho přednášek na pařížské École Polytechnique a ovlivnila další generace matematiků. Kapitola 5 nazvaná *Určení spojitých funkcí jedné proměnné, které splňují jisté podmínky* je zcela věnována funkcionálním rovnicím. Cauchy zde vyšetřoval rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{A}$$

jejíž řešení se nazývají *aditivní funkce*. Na intervalu $(0, \infty)$ zkoumal rovnici (L), jejímiž řešeními jsou *logaritmické funkce*. Zabýval se také rovnicí

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{E}$$

jejímiž řešeními jsou *exponenciální funkce*, a rovnicí

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{M}$$

jejímiž řešeními jsou *multiplikativní funkce*. Rovnice (A), (L), (E) a (M) se často nazývají Cauchyho rovnice. Řešil též rovnici

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{C}$$

která bývá nazývána *d'Alembertovou rovnicí* nebo *Poissonovou rovnicí* nebo také *kosinovou rovnicí*; dospěl k ní již dříve Jean d'Alembert (1717–1783) při studiu skládání sil. Označení rovnic písmeny a terminologie je převzata z [20].

Cauchy se zabýval pouze *spojitými řešeními* těchto rovnic a popsal obecný tvar jejich řešení, který odvodil na úrovni přesnosti své doby. Jsou to[3] pro (A) všechny

[3] Zde ln a exp značí přirozený logaritmus a exponenciálu o základu e.

funkce f tvaru $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$, pro (E) funkce $f(x) = \exp(cx)$, $c \in \mathbb{R}$, a $f \equiv 0$, pro (L) všechny funkce $f(x) = c \ln x$, $c \in \mathbb{R}$, a pro (M) všechny funkce tvaru $f(x) = x^c$, $c \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$. Netriviálními spojitými řešeními rovnice (C) jsou funkce $f(x) = \cos(cx)$ a $f(x) = \cosh(cx)$. Znalosti o funkcionálních rovnicích Cauchy následně využil v dalších kapitolách např. k odvození binomické řady pro $(1+x)^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, a k nalezení rozvoje exponenciální funkce. K funkcionálním rovnicím se vrátil v kapitole 8 nazvané *O imaginárních funkcích a proměnných*, kde hledal jejich řešení v komplexním oboru.

Pro naše potřeby tyto zatím uvedené ukázky postačí; poznamenejme, že v [34], kapitola 2 je uveden spolu s užívanými jmény seznam dobře známých funkcionálních rovnic, který má celkem 23 položek.[4] Pro bližší seznámení s historií funkcionálních rovnic doporučujeme např. text [12] nebo [44].

3. Příklady

Metody řešení funkcionálních rovnic jsou velmi rozmanité, a tak není divu, že existuje řada publikací, které jsou přímo zaměřeny na toto téma. Jejich spektrum zahrnuje příklady z různých matematických soutěží, instruktážní texty s tímto zaměřením, až po obsáhlé knihy, které popisují příslušné teoretické zázemí. V nich čtenář nalezne řadu odkazů. Také náhled na internet poskytne více než dost takto zaměřených textů. Připomeňme překlad populární knížky [10] či původní texty [30], [36], [37]. Poslední dvě jsou obsáhlými monografiemi.

Pro ilustraci uveďme příklad řešení jedné funkcionální rovnice substituční metodou ([34], str. 21): Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro něž platí

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Nahradíme x výrazem $1-x$, čímž dostaneme

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4.$$

Zároveň však platí $f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$. Dosazením do předchozí rovnice se zbavíme členu $f(1-x)$ a po algebraických úpravách získáme

$$\begin{aligned} f(x)\big(1 - x^2 + 2x^3 - x^4\big) &= 1 - 2x^2 + 2x^3 - 2x^5 + x^6 = \\ &= \big(1 - x^2 + 2x^3 - x^4\big) - x^2\big(1 - x^2 + 2x^3 - x^4\big), \end{aligned}$$

odkud po dělení polynomem $1 - x^2 + 2x^3 - x^4$ obdržíme[5]

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Ukázka zdaleka nepostihuje rozmanitost problémů, které jsou s touto problematikou spojeny. Zdůraznili jsme, že se Cauchy zabýval spojitými řešeními vyšetřovaných rov-

[4] Jsou mezi nimi i Pexiderovy rovnice, o kterých se zmíníme dále.

[5] Dělení je korektní jen pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, kde $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ jsou reálné kořeny uvedeného polynomu. Z funkcionální rovnice vyplývá, že hodnotami f v bodech $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$ jsou jednoznačně určeny i hodnoty v bodech x_1, x_2. Není těžké ověřit, že $f(x) = 1 - x^2$ je řešením funkcionální rovnice na $\mathbb{R}$, a toto řešení je určeno jednoznačně.

nic. Jistá regularita je totiž velmi podstatná. Uvedeme další jednoduchý příklad: Následující čtyři funkce

$$f \equiv 0, \quad f \equiv 1, \quad f(x) = \operatorname{sgn} x \quad \text{a} \quad f(x) = |\operatorname{sgn} x|$$

jsou řešeními rovnice (M) na $\mathbb{R}$, ale poslední dvě nejsou spojité v bodě 0, takže tvoří-li podmínku regularity spojitost, tyto funkce řešeními nejsou.

Řešení závisí podstatně i na oboru, na kterém s funkcemi pracujeme. Zkusme rovnici (E) řešit nejprve na $\mathbb{R}$. Zřejmým řešením je funkce $f \equiv 0$. Pokud v nějakém bodě o je $f(o) = 0$, je také $f(x) = f((x-o)+o) = f(x-o)f(o) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, čili $f \equiv 0$. Pokud v nějakém bodě p je $f(p) \neq 0$, plyne z předchozí úvahy $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z rovnosti

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\Big) = \Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)^2 \geqq 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

plyne, že každé řešení (E) je kladné všude na $\mathbb{R}$, nebo je $f \equiv 0$.

Pokud budeme pracovat s (E) pouze na intervalu $(0, \infty)$, bude výsledek stejný, ale jeho odvození se trochu zkomplikuje. Je-li v nějakém bodě o opět $f(o) = 0$, je také $f(x) = f((x-o)+o) = f(x-o)f(o) = 0$, tentokrát však jen pro všechna $x > o$. Je-li $r \in (0, o)$, $f(r) \neq 0$, pak zvolme $n \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $nr > o$. Potom je

$$f(nr) = f(r)f((n-1)r) = \big(f(r)\big)^2 f((n-2)r) = \ldots = \big(f(r)\big)^n,$$

takže $f(nr) \neq 0$, což je spor, neboť $nr > o$. Zbytek dostaneme stejnou úvahou jako v předchozím případě.

Kdybychom rovnici (E) uvažovali na intervalu $[0, \infty)$, pak snadno ověříme, že funkce g definovaná předpisem $g(0) = 1$, $g(x) = 0$ pro $x \in (0, \infty)$ je řešením (E) na $[0, \infty)$. Naproti tomu pro řešení na $\mathbb{R}$ nebo na $(0, \infty)$ platí (viz např. [30]): Řešeními (E) jsou právě všechny funkce f tvaru

$$f \equiv 0 \quad \text{a} \quad f(x) = \exp \varphi(x),$$

kde φ je řešením (A). Jak ukazují následující dva odstavce, bez podmínky regularity může být takových řešení velmi mnoho.

Podmínka spojitosti řešení je velmi silná. Postupně se ukazovalo, že rovnice (A) má jediná řešení ve tvaru $f(x) = cx$ za daleko slabších předpokladů o f, stačí např. monotonie f nebo její omezenost shora či zdola na libovolném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$; viz [43], str. 153. To již věděl roku 1880 Gaston Darboux (1842–1917). Poměrně dlouho se však nevědělo, zda to jsou už všechna řešení rovnice (A).

S tím souvisí fakt, že teprve kolem roku 1870 byla vybudována teorie reálných čísel,[6] která se později stala klíčem k řešení tohoto problému. V roce 1905 Georg Hamel (1877–1954)[7] ukázal v [16], že existují i nespojitá řešení rovnice (A). K tomu použil bázi $\mathbb{R}$ nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$, kterou dnes nazýváme Hamelova báze (viz [35]). Takto vytvořená řešení (A) jsou však velmi „divoké“ funkce, neboť jejich graf

[6]Zasloužili se o to Richard Dedekind (1831–1916), Georg Cantor (1845–1918) a další.

[7]V letech 1905–1912 byl profesorem na Německé technice v Brně.

je hustý v $\mathbb{R}^2$; tyto funkce nejsou dokonce ani lebesgueovsky měřitelné. Poznamenejme, že v roce 1920 nezávisle na sobě dokázali Stefan Banach (1892–1945) a Wacław Sierpiński (1882–1969), že každá měřitelná aditivní funkce je už tvaru $f(x) = cx$.

Již jsme zmínili, že nespojitá řešení rovnice (A), která se někdy nazývají Hamelovy funkce, jsou velmi iregulární. Množina všech jejích řešení $\mathcal{A}$ se tak rozpadá na systém velmi jednoduchých (lineárních) funkcí a systém složitých Hamelových funkcí. Tyto funkce nejsou měřitelné, a jsou-li např. shora omezené na $M \subset \mathbb{R}$, pak má M nulovou Lebesgueovu míru.

Dánský inženýr a matematik Johan L. W. V. Jensen (1859–1925) studoval funkcionální rovnici

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\Big(\frac{x+y}{2}\Big),$$

která dnes nese jeho jméno. Ta se dá jednoduchým trikem převést na rovnici (A), a tak dokázat, že každé její *spojité* řešení je tvaru $f(x) = cx + d$, kde $c, d \in \mathbb{R}$. Obecné řešení je tvaru $f(x) = \varphi(x) + d$, kde $d \in \mathbb{R}$ a $\varphi \in \mathcal{A}$.

I v dalších případech se naše poznání postupně rozšiřovalo. Tak např. funkce Γ, která je řešením (G) na intervalu $(0, \infty)$, je charakterizována následujícími třemi vlastnostmi: (a) je řešením (G) na intervalu $(0, \infty)$, (b) $f(1) = 1$ a (c) funkce je logaritmicky konvexní, tj. $\ln f$ je konvexní funkce na $(0, \infty)$. Toto krásné tvrzení je z práce [27]. Poznamenejme ještě, že podmínky jako spojitost, diferencovatelnost či konvexita na intervalu $(0, \infty)$ k jednoznačnosti nestačí, což podtrhuje eleganci Eulerova řešení problému. Pomocí (G) se funkce Γ snadno rozšíří z intervalu $(0, \infty)$, na kterém je definována pomocí integrálu, na celou reálnou osu (v bodech $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$, má singularity). Záhy byla funkce rozšířena na celou Gaussovu rovinu $\mathbb{C}$, přičemž v bodech $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$, má jednoduché póly. Platí velmi hezká charakterizační věta, kterou dokázal roku 1939 Helmut Wielandt (1910–2001): Jedinou funkcí f holomorfní na množině $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ takovou, že (a) f je zde řešením rovnice $f(z+1) = zf(z)$, (b) $f(1) = 1$ a (c) f je omezená na pásu $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$, je funkce Γ.

4. Použití funkcionálních rovnic a nerovnic

Funkcionální rovnice nejsou pouze předmětem teoretických zkoumání, vyskytují se v mnoha aplikacích, např. v sociálních vědách, v ekonomii, kombinatorice, teorii informace apod. Je zajímavé, že např. i spojité funkce, které nemají v žádném bodě derivaci a které objevili Karl Weierstrass (1815–1897) roku 1872 nebo Teiji Takagi (1875–1960) roku 1903, se dají popsat funkcionálními rovnicemi. Blíže se o tom čtenář může dočíst v obsáhlé monografii [20].

Jak již bylo řečeno, pro svoji rozmanitost a nestandardní metody užívané při řešení, jsou funkcionální rovnice často součástí úloh v různých matematických soutěžích. Všimněme si ještě jednoho aspektu. Funkcionální rovnice a případně nerovnice jsou poměrně snadno srozumitelné a pojmově nenáročné.

Např. konvexní funkci na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ lze zavést jako funkci f, kde pro každé tři body $x, y, z \in (a, b)$, $x < y < z$, platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(je vhodné si uvědomit geometrickou interpretaci pomocí směrnic sečen). Úpravou získáme

$$f(y) \leqq f(x)\frac{z-y}{z-x} + f(z)\frac{y-x}{z-x},$$

a položíme-li nyní $\alpha = (z-y)/(z-x)$, dostaneme odtud nerovnost

$$f(y) = f\bigl(\alpha x + (1-\alpha)z\bigr) \leqq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(z),$$

což dává vzhledem k možnosti volby $y \in (x, z)$ klasickou podmínku z definice konvexity funkce f. Studentům, kteří znají pojem konvexního rovinného útvaru, je vhodné prozradit souvislost definice s konvexitou „nadgrafu" funkce f; viz např. [43], oddíl 7.2.

Poznamenejme, že volba $\alpha = 1/2$ dává definici tzv. (1/2)-konvexních funkcí. Zatímco konvexní funkce jsou spojité, existují i nespojité (1/2)-konvexní funkce. Jiná volba α vede k definici funkcí, které se zpravidla nazývají m-konvexní funkce a které se studují v různých souvislostech i v současné době.

Je zajímavé si všimnout, jak postupně stoupala četnost matematických prací využívajících funkcionální rovnice v referativních časopisech *Zentralblatt für Mathematik* a *Mathematical Reviews.* To lze snadno ověřit pomocí odpovídajících databází: *zbMATH* evidoval za rok 1950 necelé dvě desítky prací, v roce 1970 osmnáctkrát více, v roce 2000 stodvacetkrát více a v roce 2020 dokonce téměř dvěstěkrát více. Tyto údaje jsou sice částečně poplatné stoupající celkové produkci v matematice, ale i tak je to úctyhodný nárůst. Analogicky, v číslech absolutně menších, což je ovlivněno záběrem časopisů, stoupla v odpovídajících letech produkce dle databáze *MathSciNet* asi 12krát, 28krát a 26krát (ale o 10 let dříve to bylo 42krát!).

I v českých zemích se našly již na přelomu 19. a 20. století podobné publikace, ale spíše ojediněle. V roce 1893 uveřejnil Matyáš Lerch (1860–1922) více než padesátistránkovou práci o funkci Γ, ale bez podstatného použití funkcionálních rovnic. Jan V. Pexider (1874–1914) roku 1900 v práci [32] zobecnil Cauchyho rovnice, které pak úspěšně řešil; např. modifikovaná verze rovnice (A) je tvaru

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

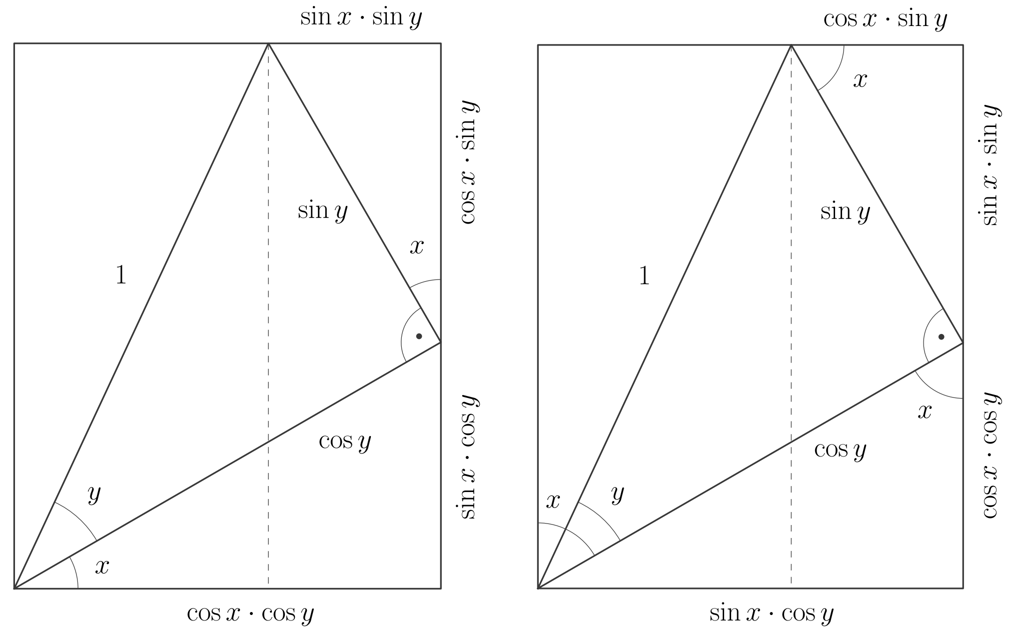
kde f, g, h jsou neznámé funkce. Spojitá řešení rovnice jsou tvaru

$$f(x) = cx + a + b, \quad g(x) = cx + a, \quad h(x) = cx + b, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Tyto modifikované funkcionální rovnice se dnes nazývají Pexiderovy; viz [29]. Musíme však zmínit ještě jednu přehledovou práci Antonína Sýkory (1847–1907), viz [39], plně věnovanou funkcionálním rovnicím, přičemž toto označení se uvádí jako alternativní k termínu „úkonová rovnice" v názvu článku. Později se v nějaké formě zabývalo funkcionálními rovnicemi u nás více autorů, viz poznámky a literatura v [30]; za všechny uveďme Františka Neumana (*1937) a nedávno zesnulého Jaroslava Smítala (1942–2022).

5. Zavedení goniometrických funkcí

Funkcionální rovnice lze využít k zavedení elementárních funkcí. Jiné cesty vedou přes mocninné řady, diferenciální rovnice apod. Funkcionální rovnice nevyžadují hlubší matematické znalosti a poskytnou poměrně snadno nezbytné poznatky k procvičování



Obr. 1. Součtové (vlevo) a rozdílové (vpravo) vzorce pro sinus a kosinus:
$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

početní techniky. Tak např. Cauchyho rovnice (E) a (L) lze využít k zavedení exponenciály a logaritmu.

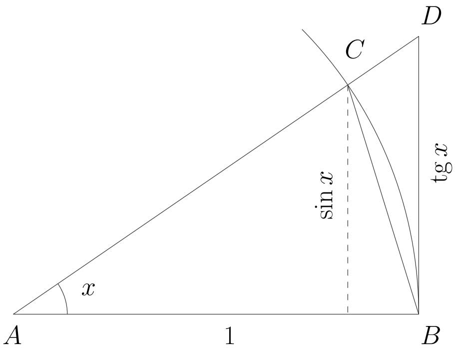
Goniometrické funkce se na střední škole zavádějí nejprve pomocí délek stran v pravoúhlém trojúhelníku. Součtové, resp. rozdílové vzorce pro sinus a kosinus lze vyvodit z obrázku 1 za předpokladu, že úhly x, y a $x + y$, resp. $x - y$, jsou ostré (viz [28]). Podobnými obrázky lze zdůvodnit platnost součtových a rozdílových vzorců i v případě, kdy některé ze zmíněných úhlů jsou tupé (viz [25]). K důkazu vzorců pro libovolná reálná čísla x, y pak vyjdeme z definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice a využijeme některé vlastnosti, které z definice snadno vyplývají. Celý postup je elementární, ale poměrně pracný (viz [26]).

Goniometrické funkce tedy představují řešení soustavy funkcionálních rovnic

$$\begin{aligned} c(x-y) &= c(x)c(y) + s(x)s(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \\ s(x-y) &= s(x)c(y) - c(x)s(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

K tomu, aby bylo řešení určeno jednoznačně, potřebujeme ještě další podmínku. Pro průměrné středoškoláky je obtížnější, neboť s pojmem limity se setkají až později. Je to podmínka

$$\lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1 \quad \Big(= \lim_{x \to 0} \frac{s(x) - s(0)}{x - 0} = s'(0) \Big).$$



Obr. 2. Geometrické znázornění nerovností $\frac{1}{2}\sin x \leqq \frac{1}{2}x \leqq \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

Podmínku můžeme studentům přiblížit obrázkem 2. Porovnáme-li obsahy trojúhelníků ABC a ABD s obsahem kruhové výseče ABC, vidíme, že platí

$$\frac{1}{2}\sin x \leqq \frac{1}{2}x \leqq \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Dělíme-li výrazem $\frac{1}{2}\sin x$ a přejdeme k převráceným hodnotám, obdržíme nerovnosti

$$1 \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq \cos x,$$

ze kterých limitním přechodem pro $x \to 0$ dostáváme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; používáme přitom tvrzení známé jako „věta o dvou policajtech“.[8]

Může být překvapující, že podmínka $\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$ zaručí nejen to, že funkce $s = \sin$ a $c = \cos$ jsou jediná řešení výše uvedené soustavy rovnic, ale i jejich diferencovatelnost všech řádů. Uveďme ještě jednu podstatně jednodušší podmínku, která vyloučí např. triviální řešení soustavy rovnic tvaru $s \equiv c \equiv 0$:

obě funkce s i c jsou nekonstantní a spojité.

Podmínka je jednoduchým důsledkem náročnější podmínky s limitou.

Cesta k existenci a jednoznačnosti řešení funkcemi sin a cos je náročná a přesahuje možnosti středoškolské matematiky. Je však důležité si uvědomit, že středoškolské definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice nejsou zcela exaktní. Výstižně to komentuje Vojtěch Jarník (1897–1970) ve své učebnici diferenciálního počtu [17]: *Způsob, jakým jsme zavedli sinus a kosinus, předpokládá znalost pojmu „délka oblouku (a to libovolného oblouku) kružnice“. Pojem délky oblouku křivé čáry je však dosti složitý limitní pojem, kterým jste se ve škole nezabývali tak důkladně, abychom mohli tyto znalosti ze školy vzít za spolehlivý základ (totéž platí o obvodu celé kružnice, který vám ve škole sloužil k definici čísla π); pojmem délky oblouku křivé čáry se budeme zabývat až později. Mohl bych ovšem se zavedením goniometrických funkcí počkat až*

[8] Ve skutečnosti jsme mlčky předpokládali $x > 0$ a vypočítali jsme pouze $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, avšak limita zleva má stejnou hodnotu, protože $\frac{\sin x}{x}$ je sudá funkce.

do té doby (a ušetřit si tím tuto poznámku), ale tím bych čtenáře zbavil na dlouhou dobu možnosti pracovat s těmito funkcemi, které mají mnoho jednoduchých vlastností a poskytují vhodnou látku ke cvičení.

Jarník volí postup, který je zcela korektní a zároveň didaktický: Vybere čtyři vlastnosti goniometrických funkcí, které označí za základní. Jde o součtové vzorce, sudost kosinu, lichost sinu, podmínku $\lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=1$ a skutečnost, že sinus je rostoucí na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$, přičemž $s(\frac{\pi}{2})=1$ (to je pro něj definice čísla π). V dalším textu pak odvozuje všechna tvrzení o goniometrických funkcích pouze pomocí čtyř základních vlastností. Teprve po výkladu Taylorových řad ukáže, že existuje právě jedna dvojice funkcí, které mají zmíněné čtyři základní vlastnosti.

Použití rozdílových vzorců namísto součtových má tu výhodu, že kromě dodatečné podmínky $\lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=1$ již nepotřebujeme další podmínky týkající se sudosti, resp. lichosti goniometrických funkcí – odvodíme je následujícím postupem. Z první rovnice dostaneme rovnost

$$c(y-x)=c(y)c(x)+s(y)s(x)=c(x-y),$$

z níž po dosazení $y=0$ plyne $c(x)=c(-x)$, $x\in\mathbb{R}$. Funkce c je proto sudá.

Podobně snadno odvodíme rovnost

$$s(y-x)=s(y)c(x)-c(y)s(x)=-s(x-y),$$

ze které analogicky vyplyne, že funkce s je lichá.

Z rovnosti $s(0)=-s(0)$ plyne $s(0)=0$. Odtud a z již odvozených rovností dostaneme součtové vzorce $c(x+y)=\ldots$, $s(x+y)=\ldots$ a speciálně vzorce

$$c(2x)=c^2(x)-s^2(x),\quad s(2x)=2s(x)c(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Užijme nyní dodatečnou podmínku, ze které vyplývá, že funkce s není konstantní. Existuje tedy $y\in\mathbb{R}$ tak, že $s(y)\neq 0$. Dále platí $s(x)=s(x+0)=s(x)c(0)+c(x)s(0)$, odkud vyplývá užitím $s(0)=0$ rovnost $c(0)=1$.

Dále snadno obdržíme

$$1=c(0)=c(x-x)=c^2(x)+s^2(x),\quad x\in\mathbb{R};$$

odtud vyplývají pro všechna $x\in\mathbb{R}$ odhady $|c(x)|\leqq 1$, $|s(x)|\leqq 1$, takže funkce s a c jsou omezené na $\mathbb{R}$. Čtenář snadno nahlédne, že odvození dalších vzorců středoškolské látky o goniometrických funkcích je vcelku rutinní záležitostí.

Pokud máme k dispozici základy diferenciálního počtu, lze využít podmínky s limitou a ukázat, že funkce s a c mají všude v $\mathbb{R}$ vlastní derivaci. Snadno ukážeme (viz opět [43]), že pro libovolně zvolené $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} s'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{s(x)c(h)+c(x)s(h)-s(x)}{h}= \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{s(x)(c(h)-1)+c(x)s(h)}{h}=s(x)\lim_{h\to 0}\frac{(c(h)-1)}{h}+c(x)\lim_{h\to 0}\frac{s(h)}{h}= \\ &= -s(x)\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{s(h/2)}{h/2}\right)^2(h/2)\right]+c(x)\cdot 1=-s(x)\cdot 1\cdot 0+c(x)=c(x), \end{aligned}$$

tj. $s'(x) = c(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.[9] Podobně se dokáže rovnost $c'(x) = -s(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Z odvozených vzorců vyplývá, že funkce c a s mají vlastní derivace všech řádů.

Nejmenší kladné číslo, v němž funkce c nabývá hodnoty 0, označíme ω; dá se ukázat, že funkce s roste na $(0, \omega)$ a $s(\omega) = 1$.

Dále platí

$$c(x - \omega) = c(x)c(\omega) + s(x)s(\omega) = s(x),$$

a tak postupně dostaneme

$$\begin{aligned} c(x+\omega) &= -s(x), & s(x+\omega) &= c(x), \\ c(x+2\omega) &= -s(x+\omega) = -c(x), & c(x+4\omega) &= -c(x+2\omega) = c(x), \\ s(x+2\omega) &= c(x+\omega) = -s(x), & s(x+4\omega) &= -s(x+2\omega) = s(x). \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce c a s jsou periodické s nejmenší kladnou periodou 4ω; položíme $\pi = 2\omega$. Toto může být pro nás *definice* čísla π. Platí $c(\omega) = 0 = c(3\omega)$, a proto se funkce c anuluje právě ve všech bodech množiny $\{(2k+1)\omega : k \in \mathbb{Z}\}$. Podobně dostaneme popis množiny všech nulových bodů funkce s; je to množina $\{2k\omega : k \in \mathbb{Z}\}$.

I když jsme odvodili řadu vlastností funkcí s a c, stále nám chybí důkaz jejich existence a jednoznačnosti. Ten lze provést např. pomocí jejich rozvojů v mocninnou řadu, pomocí elementární teorie diferenciálních rovnic apod. V prvním případě z hodnot derivací v bodě 0 nejprve odvodíme známé Taylorovy řady a pomocí Lagrangeova tvaru zbytku dokážeme, že se ve všech bodech shodují s funkcemi c a s:

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad s(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Tím je dokázána jednoznačnost řešení naší soustavy funkcionálních rovnic s podmínkou $\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$. Nakonec zbývá ověřit, že funkce s a c definované výše uvedenými řadami skutečně představují řešení soustavy (viz [17, kapitola XII]). Teprve potom je můžeme označit za sinus a kosinus.

Cest k zavedení goniometrických funkcí pomocí funkcionálních rovnic je více, lze využít např. kosinovou rovnici (C) nebo rovnici pro sinus

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Jistý přehled možností podává např. práce [19], historický vývoj goniometrických funkcí je popsán např. v [38].

6. Závěr

Funkcionální rovnice jsou dodnes předmětem aktivního výzkumu. Hrají zásadní roli v analytické teorii čísel, uplatňují se např. při studiu Riemannovy ζ-funkce a tzv. L-funkcí, to je však již téma na samostatný článek (podrobněji viz [18], [45]).

[9] Při úpravách jsme užili rovnosti $c(h) = c^2(h/2) - s^2(h/2)$ a $1 = c^2(h/2) + s^2(h/2)$.

L i t e r a t u r a

[1] Aczél, J.: *Lectures on functional equations and their applications.* Academic Press, 1966.

[2] Aczél, J.: *On history, applications and theory of functional equations.* In: J. Aczél (ed.): Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, 1966, 3–12.

[3] Aczél, J. (ed.): *Functional equations: history, applications and theory.* D. Reidel, 1984.

[4] Aczél, J., Dhombres, J. G.: *Functional equations in several variables. With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.* Cambridge University Press, 1989.

[5] Artin, E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion.* B. G. Teubner Verlag, 1931.

[6] Artin, E.: *The gamma function.* Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[7] Bečvář, J.: *Nicolas Oresme – francouzský učenec.* In: M. Bečvářová a kol.: Matematika ve středověké Evropě, Pozdní středověk a renesance, Česká technika – nakladatelství ČVUT, 2018, 263–296.

[8] Bradley, R. E., Sandifer, C. E.: *Cauchy's Cours d'analyse. An annotated translation.* Springer, 2009.

[9] Cauchy, A. L.: *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, 1re partie.* Analyse algébrique. Imprimerie royale, 1821.

[10] Davidov, L.: *Funkcionální rovnice.* Mladá fronta, 1984.

[11] Davis, P. J.: *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function.* Amer. Math. Monthly 66 (1959), 849–869.

[12] Dhombres, J. G.: *On the historical role of functional equations.* In: J. Aczél (ed.): Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, 1966, 17–31.

[13] Durand, D. B.: *Nicole Oresme and the mediaeval origins of modern science.* Speculum 16 (1941), 167–185.

[14] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus.* Springer, 1979.

[15] Euler, L.: *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum.* Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1755.

[16] Hamel, G.: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung:* $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. 60 (1905), 459–462.

[17] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* Academia, 1974.

[18] Kala, V.: *Abelova cena v roce 2018 udělena za Langlandsův program.* PMFA 63 (2018), 78–90.

[19] Kannapan, P.: *Trigonometric identities and functional equations.* Math. Gaz. 88 (2004), 249–257.

[20] Kannapan, P.: *Functional equations and inequalities with applications.* Springer, 2009.

[21] Konopecký, F.: *Funkcionální rovnice.* Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, 2008.

[22] Kuczma, M.: *A survey of the theory of functional equations.* Publ. Fac. Électrotech. Univ. Belgrade, Sér. Math. Phys. 130 (1964), 1–64.

[23] Kuczma, M.: *Functional equations in a single variable.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1968.

[24] Kuczma, M.: *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality.* Birkhäuser, 2009.

[25] Mathematics Stack Exchange: *Looking for an alternative proof of the angle difference expansion* [online], [cit. 26. 3. 2022].
Dostupné z: `https://math.stackexchange.com/q/1382809`

[26] Mathematics Stack Exchange: *Sines and cosines of the sum and difference of obtuse angles* [online], [cit. 26. 3. 2022].
Dostupné z: `https://math.stackexchange.com/q/4363804`

[27] Mollerup, J., Bohr, H.: *Lærebog i matematisk analyse III.* Jul. Gjellerups, 1922.

[28] Nelsen, R.: *Proofs without words II.* Mathematical Association of America, 2000.

[29] Netuka, I.: *Pexiderova rovnice.* In: J. Bečvář (ed.): Jan Vilém Pexider (1874–1914), Prometheus, Praha, 1997, 51–60.

[30] Neuman, F.: *Funkcionální rovnice.* SNTL, 1986.

[31] Pešková, L.: *Funkcionální rovnice v příkladech z matematických olympiád.* Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci, 2012.

[32] Pexider, J. V.: *Studie o funkcionálních rovnicích.* Čas. pěst. math. fys. 29 (1900), 153–195.

[33] Picard, É: *Leçons sur quelques équations fonctionnelles.* Gauthier–Villars, 1950.

[34] Rassias, J. M., a kol.: *Functional equations and inequalities. Solutions and stability results.* World Scientific, 2017.

[35] Sleziak, M.: *Hamel basis and additive functions* [online], [cit. 26. 3. 2022]. Dostupné z: `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty/rozne/pozn/tm/hamel.pdf`

[36] Small, Ch. G.: *Functional equations and how to solve them.* Springer, 2007.

[37] Smítal, J.: *On functions and functional equations.* A. Hilger, 1988.

[38] Smýkalová, R.: *Goniometrické funkce v elementární matematice.* Akademické nakladatelství CERM, 2015.

[39] Sýkora, A.: *O rovnicích úkonových.* Čas. pěst. math. fys. 33 (1904), 181–198.

[40] Šatný, P.: *Elementární metody řešení funkcionálních rovnic.* Disertační práce. Masarykova univerzita v Brně, 2018.

[41] The Euler Archive. A digital library dedicated to the work and life of Leonhard Euler [online], [cit. 26. 3. 2022]. Dostupné z: `http://eulerarchive.maa.org/`

[42] Veselý, J.: *Poznámky k historii funkce gama.* In: J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Člověk–umění–matematika, Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky, Prometheus, 1996, 49–71.

[43] Veselý, J.: *Základy matematické analýzy I.* Matfyzpress, 2004.

[44] Veselý, J.: *Poznámky k historii funkcionálních rovnic.* In: J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): 31. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010, Prometheus, 2010, 29–50.

[45] Wikipedia: *Functional equation (L-function)* [online], [cit. 26. 3. 2022]. Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Functional_equation_(L-function)`

[46] Youschkevitch, A. P.: *The concept of function up to the middle of the 19th century.* Arch. Hist. Exact Sci. 16 (1976), 37–85.