Dag Hrubý

Kružnice v Gaussově rovině

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 3, 157–162

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150365

KRUŽNICE V GAUSSOVĚ ROVINĚ

DAG HRUBÝ

Pokud zadáme studentům ve škole úlohu, aby znázornili v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí $|z| = 4$, tak jsou, podle mého názoru, možné aspoň dva způsoby, jak daný úkol splnit. Označil bych je jako přístup geometrický a přístup algebraický. Student preferující geometrický přístup chápe číslo $|z|$ jako vzdálenost obrazu komplexního čísla z od počátku, která je rovna 4. Uvědomí si, že čísel s touto vlastností je v Gaussově rovině nekonečně mnoho a jejich obrazy vytvoří kružnici se středem v bodě $S = [0; 0]$ a poloměrem 4. Gaussovu rovinu budeme dále značit $\mathbb{G}$.

Druhý možný způsob, který bychom mohli nazvat algebraický, je ten, že student hned neví o co jde, neumí geometricky interpretovat zápis $|z| = 4$, chápe ho pouze jako absolutní hodnotu (modul) čísla z, která se rovná 4. Pokud si vzpomene, jak je absolutní hodnota komplexního čísla z definována, tak po dosazení $z = x + y\mathrm{i}$ dostane

$$\begin{aligned} |z| = |x + y\mathrm{i}| &= 4 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 16. \end{aligned}$$

Je-li náš student absolvent kurzu analytické geometrie v rovině, tak pozná, že se jedná o kružnici. Dostáváme se tak k otázce, zda je vhodnější při výuce matematiky na střední škole probrat nejdříve komplexní čísla a potom analytickou geometrii nebo naopak. Autor článku zastává názor, že je vhodnější zařadit do výuky komplexní čísla až po analytické geometrii. Úvod tohoto článku měl právě podpořit tento názor.

Připomeňme si nyní některé známé vztahy. Je-li $z = x + yi$, pak zřejmě $\overline{z} = x - yi$ a platí $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Rovnici kružnice se středem v bodě $[0; 0]$ a poloměrem r lze zapsat ve tvaru

$$z \cdot \overline{z} = r^2.$$

Podobně, pro rovnici kružnice se středem v bodě $a \in \mathbb{G}$ platí

$$\begin{aligned} |z - a| &= r \\ (z - a) \cdot (\overline{z} - a) &= r^2 \\ z \cdot \overline{z} - a \cdot \overline{z} - \overline{a} \cdot z + a \cdot \overline{a} &= r^2. \end{aligned}$$

Tuto rovnici můžeme zapsat v obecnějším tvaru

$$z \cdot \overline{z} + \alpha \cdot \overline{z} + \overline{\alpha} \cdot z + \beta = 0,$$

kde pro koeficient $\beta \in \mathbb{R}$ platí $\beta = \alpha\overline{\alpha} - r^2$ a odtud pro poloměr r dostáváme

$$r = \sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha} - \beta}, \qquad |\alpha|^2 - \beta > 0.$$

Tato kružnice má střed v bodě $s = -\alpha a$, $\alpha \in \mathbb{G}$.

Úloha 1

V $\mathbb{G}$ určete rovnici kružnice se středem v bodě $s = \mathrm{i}$ a poloměrem 1.

Řešení: Pro koeficienty α, β platí $\alpha = -\mathrm{i}$, $\beta = \alpha \cdot \overline{\alpha} - r^2 = \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) - 1 = 0$. Po dosazení dostáváme

$$z \cdot \overline{z} - \mathrm{i}\,\overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0.$$

Dosadíme-li do této rovnice $z = x + yi$, dostaneme odpovídající rovnici v $\mathbb{E}^2$.

$$\begin{aligned} (x + yi) \cdot (x - yi) - \mathrm{i}(x - yi) + \mathrm{i}(x + yi) &= 0 \\ x^2 + y^2 - \mathrm{i}x - y + \mathrm{i}x - y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Úloha 2

V $\mathbb{G}$ napište rovnici kružnice, která prochází body $a = 2 + 2\mathrm{i}$, $b = -1 - \mathrm{i}$, $c = 1 - \mathrm{i}$.

Řešení: Rovnici kružnice budeme hledat ve tvaru $z \cdot \overline{z} + \alpha \cdot \overline{z} + \overline{\alpha} \cdot z + \beta = 0$. Do této rovnice postupně dosadíme a dostaneme soustavu

$$
\begin{aligned}
(2 + 2\mathrm{i}) \cdot (2 - 2\mathrm{i}) + \alpha(2 - 2\mathrm{i}) + \overline{\alpha}(2 + 2i) + \beta &= 0 \\
(-1 - \mathrm{i}) \cdot (-1 + \mathrm{i}) + \alpha(-1 + \mathrm{i}) + \overline{\alpha}(-1 - \mathrm{i}) + \beta &= 0 \\
(1 - \mathrm{i}) \cdot (l + \mathrm{i}) + \alpha(1 + \mathrm{i}) + \overline{\alpha}(l - \mathrm{i}) + \beta &= 0
\end{aligned}
$$

Budeme-li trpěliví, dojdeme po chvíli k výsledku $\alpha = \mathrm{i}$, $\overline{\alpha} = \mathrm{i}$, $\beta = -4$. Pro rovnici kružnice pak platí

$$z \cdot \overline{z} - \mathrm{i} \cdot \overline{z} + \mathrm{i} \cdot z - 4 = 0.$$

Úloha 3

Pro která $a \in \mathbb{G}$ mají kružnice $|z| = 1$, $|z - a| = 2$ právě jeden společný bod?

Řešení: Rovnice obou kružnic přepíšeme do tvaru

$$
\begin{aligned}
z \cdot \overline{z} &= 1 \\
(z - a) \cdot (\overline{z} - \overline{a}) &= 4
\end{aligned}
$$

z rovnice $z \cdot \overline{z} = 1$ vyjádříme $\overline{z}$ a dosadíme do druhé rovnice

$$
\begin{aligned}
(z - a) \cdot \left(\frac{1}{z} - \overline{a}\right) &= 4 \\
\overline{a} \cdot z^2 + (3 - a \cdot \overline{a}) \cdot z + a &= 0.
\end{aligned}
$$

Dostáváme tak kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = (3 - a \cdot \overline{a}))^2 - 4a\overline{a}.$$

Podmínkou dotyku obou kružnic je $D = 0$. Dostáváme rovnici

$$
\begin{aligned}
(3 - a \cdot \overline{a}))^2 - 4a\overline{a} &= 0 \\
(a \cdot \overline{a})^2 - 10a\overline{a} + 9 &= 0 \\
(a \cdot \overline{a} - 9) \cdot (a \cdot \overline{a} - 1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Řešením naší úlohy jsou všechna komplexní čísla a, pro která platí

$$a \cdot \overline{a} = 9 \quad \text{nebo} \quad a \cdot \overline{a} = l, \quad \text{resp.} \quad |a| = 3 \quad \text{nebo} |a| = 1.$$

Elegantnější by ovšem bylo „geometrické řešení" této úlohy, které si snad laskavý čtenář rád provede.

Úloha 4

V Gaussově rovině určete obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí:

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = \sqrt{3}.$$

Řešení: Hloubavý čtenář pozná, že hledáme všechna komplexní čísla z, pro něž je poměr vzdáleností jejich obrazů od 1 a -1 roven $\sqrt{3}$ a vidí hned, že se jedná o Apolloniovu kružnici a přemýšlí o jejím středu a poloměru. Pokusíme se nyní tuto hypotézu dokázat. Rovnici $|z-1| = \sqrt{3} \cdot |z+1|$ lze přepsat na tvar

$$(z-l) \cdot (\overline{z}-1) = 3(z+l) \cdot (\overline{z}+l)\,.$$

Po úpravě dostáváme rovnici

$$z \cdot \overline{z} + 2\overline{z} + 2z + 1 = 0,$$

která nám připomíná rovnici $z \cdot \overline{z} + \alpha \cdot \overline{z} + \overline{\alpha} z + \beta = 0$, $\beta = \alpha \cdot \overline{\alpha} - r^2$, což je rovnice kružnice. V našem případě je $\alpha = 2$, $\overline{a} = 2$, $\beta = 1$. Pro poloměr r dostáváme $r = \sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha} - \beta} = 3$. Kružnice má střed v bodě $s = -\alpha = -2$. Její rovnici pak můžeme napsat ve tvaru

$$|z+2| = \sqrt{3}.$$

Náročný čtenář se může pokusit o nalezení středu a poloměru kružnice $\dfrac{|z-a|}{|z+a|} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, $a \in \mathbb{C}$.

Úloha 5

V Gaussově rovině je dán trojúhelník ABC, jehož vrcholy jsou po řadě obrazy komplexních čísel $a = -4$, $b = 2$, $c = 2\mathrm{i}$. Určete rovnici kružnice, která prochází středy stran tohoto trojúhelníka.

Řešení: Labužníci jistě poznali, že se jedná o Feuerbachovu kružnici devíti bodů. Rovnici kružnice budeme hledat ve tvaru

$$z \cdot \overline{z} + \alpha \cdot \overline{z} + \overline{\alpha} \cdot z + \beta = 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pro středy stran trojúhelníku ABC platí

$$S_{AB} = -1, S_{BC} = 1 + \mathrm{i}, S_{AC} = -2 + \mathrm{i}$$

Tato čísla postupně dosadíme do rovnice kružnice a dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - \alpha - \overline{\alpha} + \beta &= 0 \\ (1+\mathrm{i}) \cdot (1-\mathrm{i}) + (1+\mathrm{i}) \cdot \alpha + (1-\mathrm{i}) \cdot \overline{a} + \beta &= 0 \\ (-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i}) - (2-\mathrm{i}) \cdot \alpha - (2+\mathrm{i}) \cdot \overline{a} + \beta &= 0. \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme soustavu rovnic o neznámých α, $\overline{\alpha}$, β

$$\begin{aligned} 1 - \alpha - \overline{\alpha} + \beta &= 0 \\ 2 + \alpha + \overline{\alpha} - \mathrm{i} \cdot \alpha + \mathrm{i} \cdot \overline{a} + \beta &= 0 \\ 5 - 2\alpha - 2\overline{\alpha} - \mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\overline{\alpha} + \beta &= 0. \end{aligned}$$

Odtud již snadno plyne

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i} \qquad \overline{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} \qquad \beta = 0$$

Hledaná rovnice kružnice je

$$z \cdot \overline{z} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) \cdot \overline{z} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) \cdot z = 0$$

Pro její střed a poloměr platí

$$s = -\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} \quad r = \sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha} - \beta} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Z rovnice kružnice plyne, že prochází počátkem soustavy souřadnic, který je v našem případě současně patou výšky vedené z vrcholu C. Zbývající dvě paty výšek v_a, v_b leží v našem případě vně trojúhelníku na Tháletově kružnici sestrojené nad průměrem AB. Rovnice této Tháletovy kružnice je

$$(z + l) \cdot (\overline{z} + l) = 9$$
$$z \cdot \overline{z} + \overline{z} - 8 = 0.$$

Hledané paty výšek v_a, v_b jsou pak průsečíky této Tháletovy kružnice a naší kružnice. Trpělivý čtenář se může přesvědčit, že se jedná o body $z = -1 + 3\mathrm{i}$ a $z = \frac{4}{5} + \frac{12}{5}\mathrm{i}$.

Literatura

[1] Ráb, M., *Komplexní čísla v elementární matematice*, Masarykova univerzita Brno, 1996.

[2] Vyšín, J., *Úlohy z matematiky pro IV. ročník gymnázií*, SPN, Praha, 1976

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz