Jindřich Bečvář; Vlastimil Dlab
Babylonský výpočet čísla $\sqrt{2}$

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 2, 66–71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150354

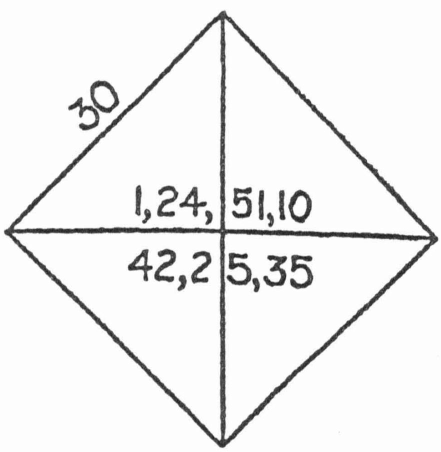
BABYLONSKÝ VÝPOČET ČÍSLA $\sqrt{2}$

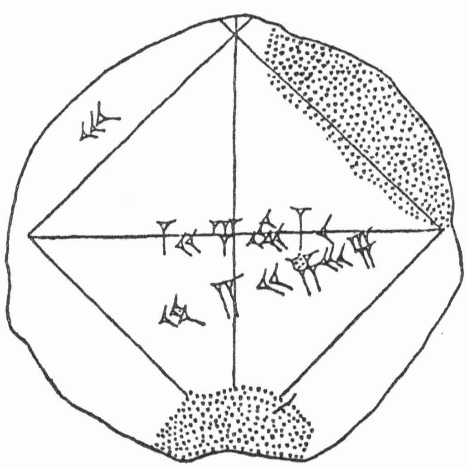
Jindřich Bečvář, Vlastimil Dlab

Hliněná tabulka YBC7289 pocházející asi z 18. nebo 17. století před naším letopočtem, která je uložena ve sbírce univerzity Yale, udává hodnotu odmocniny ze dvou v šedesátkové soustavě ve tvaru

$$(1; 24, 51, 10), \qquad \text{tj.} \qquad \sqrt{2} \doteq 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

Po přepočtu do desítkové soustavy získáme hodnotu $1{,}414212963\ldots$, která je velmi přesná; správná hodnota odmocniny ze dvou je totiž $1{,}414213562\ldots$





Babylonský výpočet čísla $\sqrt{2}$ byl pravděpodobně (v dnešní terminologii) založen na užití posloupnosti $\{a_t \mid 0 \leq t\}$ definované volbou výchozí hodnoty a_0 a rekurentním vztahem

$$a_{t+1} = \frac{1}{2}\left(a_t + \frac{2}{a_t}\right) \quad \text{pro každé} \quad t \geq 0.$$

Limita této posloupnosti je $\sqrt{2}$.

Tato skutečnost ihned vyplývá ze tří následujících tvrzení, která je možno snadno dokázat.

1. Pro každé $a_t > 0$, $a_t \neq \sqrt{2}$, je $a_{t+1} > \sqrt{2}$. Je-li $a_t = \sqrt{2}$, je $a_{t+1} = \sqrt{2}$.

2. Je-li $a_t > \sqrt{2}$, je $\sqrt{2} < a_{t+1} < a_t$. Proto existuje limita posloupnosti $\{a_t \mid 0 \leq t\}$ a je

$$\lim_{t\to\infty} a_t \geq \sqrt{2}.$$

3. Je-li $a_t > \sqrt{2}$, je $a_{t+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(a_t - \sqrt{2})$. Proto je

$$\lim_{t\to\infty} a_t \leq \sqrt{2}.$$

Poznámka. Předchozí tvrzení lze dokázat i pro posloupnosti $\{b_t \mid \mid 0 \leq t\}$ definované volbou výchozí hodnoty b_0, kladným reálným číslem α a rekurentním vztahem

$$b_{t+1} = \frac{1}{2}\left(b_t + \frac{\alpha}{b_t}\right) \quad \text{pro každé} \quad t \geq 0.$$

Limita této posloupnosti je $\sqrt{\alpha}$.

Cvičení. Vypočtěte hodnotu čísla $\sqrt{\pi}$.

Předchozí úvahy lze přirozeným způsobem zobecnit. Definujme posloupnost $\{a_t \mid 0 \leq t\}$ volbou výchozí hodnoty a_0 a rekurentním vztahem

$$a_{t+1} = \frac{n-1}{n}\left(a_t + \frac{r}{(n-1)a_t^{n-1}}\right) \quad \text{pro každé} \quad t \geq 0,$$

kde $n \geq 2$ je přirozené číslo a r reálné číslo.

Limita této posloupnosti je $\sqrt[n]{r}$.

Příklad. Pro $n = 7$, $r = \pi$ a $a_0 = 5$ dostáváme klesající posloupnost, v níž je např. $a_{13} = 1,17766403\ldots$ Přitom je $\sqrt[7]{\pi} = 1,7766403\ldots$

$\star \quad \star \quad \star$

Babylonští počtáři však neužívali limity a patrně ani exaktně formulované rekurentní vztahy. Přesto v podstatě postupovali výše uvedeným způsobem. Jejich úvahy se pokusíme nastínit. Počítejme odmocninu kladného čísla A, které není čtvercem. Zjevně existuje přirozené číslo a, pro něž je $a^2 < A < (a+1)^2$. Pišme $A = a^2 + b$. Nyní je

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2+b} < \sqrt{a^2+b+\frac{b^2}{4a^2}} = a+\frac{b}{2a} = \frac{2a^2+b}{2a} = \frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right).$$

Položme $a = a_0$ a jako první aproximaci čísla $\sqrt{A}$ vezměme hodnotu

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right).$$

Podle předešlého je $\sqrt{A} < a_1$. Položme proto $\sqrt{A} = a_1 - x$, kde x je kladné číslo. Potom je

$$A = a_1^2 - 2a_1x + x^2 > a_1^2 - 2a_1x.$$

Položme

$$x' = \frac{a_1^2 - A}{2a_1}$$

a jako druhou aproximaci čísla $\sqrt{A}$ vezměme hodnotu

$$a_2 = a_1 - x' = a_1 - \frac{a_1^2 - A}{2a_1} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right).$$

Protože je zřejmě $0 < x' < x$, je $\sqrt{A} < a_2 < a_1$. Stejným způsobem lze postupovat dále a konstruovat tak posloupnost $\{a_t \mid 0 \leq t\}$, pro niž je

$$a_{t+1} = \frac{1}{2}\left(a_t + \frac{A}{a_t}\right) \quad \text{pro každé} \quad t \geq 0.$$

Její hodnoty „stále lépe“ aproximují odmocninu čísla A.

Při babylonském výpočtu odmocniny ze dvou klademe $a_0 = 1$ a dostáváme:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{1} + 1\Big) = \frac{3}{2} = 1{,}5,\\
a_2 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\Big) = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6},\\
a_3 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{24}{17} + \frac{17}{12}\Big) = \frac{577}{408} = 1{,}4142156\ldots,\\
a_4 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2\cdot 17\cdot 24}{577} + \frac{577}{17\cdot 24}\Big) = \cdots = 1{,}4142135\ldots
\end{aligned}$$

Babylonští počtáři dospěli patrně k hodnotě a_3. Jistá nesrovnalost v desetinném rozvoji na šestém desetinném místě byla patrně způsobena aproximací převrácené hodnoty čísla 17 (v šedesátinných zlomcích).[1]

Jako další příklad vypočtěme druhou odmocninu z čísla 105 300. Protože je

$$324^2 < 105\,300 < 325^2,$$

položíme $a_0 = 324$. Dále je

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{105300}{324} + 324\Big) = 324{,}5,\\
a_2 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{105300}{324,5} + 324,5\Big) = 324{,}4996148\ldots
\end{aligned}$$

Přitom je $\sqrt{105\,300} \doteq 324{,}4996148\ldots$ Již první aproximace je velice přesná, přesnost druhé aproximace již sahá za rámec běžné kalkulačky (sedm desetiných míst je vypočteno zcela přesně).

Uvědomme si, že přesnost tohoto postupu narůstá se zvětšujícím se číslem A, jak jsme ostatně měli možnost zjistit porovnáním výpočtů čísel $\sqrt{2}$ a $\sqrt{105\,300}$. Ukažme pro jednoduchost přesnost

[1] Protože je číslo 17 nesoudělné s číslem 60, je obtížné vyjádřit jeho převrácenou hodnotu v šedesátinných zlomcích. Nejmenším přirozeným číslem, které tyto problémy dělá, je číslo 7.

první aproximace druhé odmocniny čísla A. Pišme opět $A = a^2 + b$, kde $a^2 < A < (a+1)^2$; je-li dále $\sqrt{A} = a + k$, je $0 < k < 1$. Potom

$$a^2 + b = a^2 + 2ak + k^2, \qquad \text{a odtud} \quad k = \frac{b}{2a+k}.$$

Je tedy (položíme $k = 0$ a $k = 1$)

$$\frac{b}{2a+1} < k < \frac{b}{2a}.$$

Při první aproximaci klademe $k = \frac{b}{2a}$, je totiž

$$\sqrt{A} = a + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2+b}{2a} = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{A}{a}\Big).$$

Chyba je menší než

$$\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a+1} = \frac{b}{2a(2a+1)},$$

přičemž b je nejvýše rovno $(a+1)^2 - a^2 - 1 = 2a$. Chyba první aproximace je tedy menší než $\frac{1}{2a+1}$. Se vzrůstající hodnotou čísla A tedy přesnost první aproximace roste.

Obdobným způsobem lze počítat i vyšší odmocniny. Naznačme výpočet n-té odmocniny čísla A. Pišme $A = a^n + b$, kde a je přirozené číslo, pro něž

$$a^n < A < (a+1)^n.$$

Nyní je

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n + b} < \sqrt[n]{a^n + b + \cdots + \frac{b^n}{na^{n-1}}} = \Big(a + \frac{b}{na^{n-1}}\Big).$$

Položme tedy $a = a_0$ a jako první aproximaci čísla $\sqrt[n]{A}$ vezměme hodnotu

$$a_1 = \frac{1}{n}\Big(na_0 + \frac{b}{a_0^{n-1}}\Big) = \frac{n-1}{n}\Big(a_0 + \frac{A}{(n-1)a_0^{n-1}}\Big).$$

O výpočtu odmocnin ve staré Mezopotámii je podrobná pasáž v monografii [2] (str. 230–232). Zajímavé je, že se obdobné metody používaly po celá dlouhá staletí a tisíciletí; o výpočtu odmocnin v pracích Leonarda Pisánského ze začátku 13. století viz [1] (str. 278–283).

Literatura

[1] Bečvář J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě*, Dějiny matematiky, sv. 19, Prometheus, Praha, 2001

[2] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, Dějiny matematiky, sv. 23, Prometheus, Praha, 2003

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakzúlta Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Jindrich.Becvar@mff.cuni.cz