Pavel Leischner
Rozřezávání čtyřúhelníku

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 1, 28–36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150340`

ROZŘEZÁVÁNÍ ČTYŘÚHELNÍKU

Pavel Leischner

V příspěvcích [1] a [2] se hovoří o důkladném či dokonalém porozumění elementární matematice. Oběma termíny autoři asi označují tentýž pojem, který je objasňován ukázkami různých přístupů k řešení vybraných úloh. Snahu o důkladná řešení problémů z elementární matematiky hodnotím kladně. Jen mám pocit, že řešení úlohy z článku [1] mohlo být prezentováno lépe. Snad mi tedy autoři nebudou mít za zlé, když jejich postupy trochu doplním. Text té úlohy, jež byla označena jako *problém dědictví*, můžeme přeformulovat následovně:

Úloha 1. Uvnitř konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, jehož středy stran BC, CD, DA, AB jsou (v daném pořadí) označeny písmeny K, L, M, N, určete bod G tak, aby měly čtyřúhelníky $ANGM$, $BKGN$, $CLGK$ a $DMGL$ stejný obsah.

První řešení. Z faktu, že obsah S konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je roven součtu obsahů trojúhelníků BDA a BDC plyne vztah

$$S = \frac{1}{2}|BD| \cdot v, \quad \text{kde} \quad v = v_1 + v_2 \tag{1}$$

a v_1, v_2 jsou vzdálenosti vrcholů A, C od přímky BD.

Navíc víme, že úsečky KL a MN jsou střední příčky trojúhelníků BDA a BDC. Jsou tedy rovnoběžné s úhlopříčkou BD a platí

$$|KL| = \frac{1}{2}|BD| = |MN|. \tag{2}$$

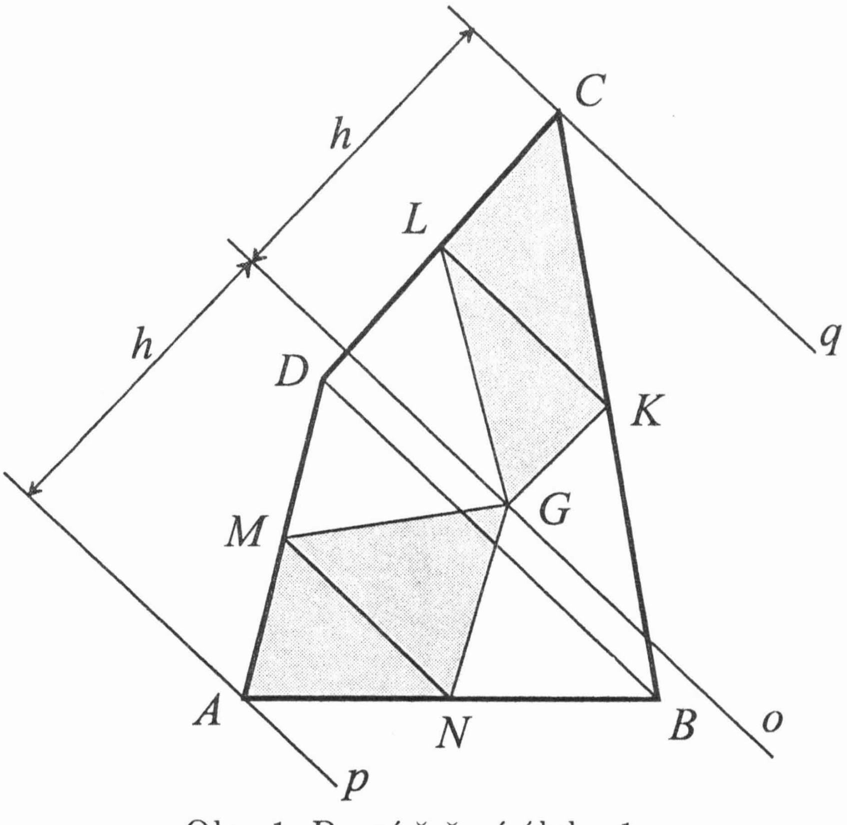
Představme si daný čtyřúhelník $ABCD$ v pásu ohraničeném přímkami p a q vedenými body A a C rovnoběžně s přímkou BD (obr. 1). Z aplikace vztahu (1) na čtyřúhelníky $ANGM$, $CLGK$ a z podmínky rovnosti jejich obsahů plyne, že se hledaný bod G

(pokud existuje) nachází na ose pásu rovnoběžek p, q. Naštěstí mají oba obsahy velikost

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BD|}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{4} S, \quad \text{kde} \quad S = S_{ABCD},$$

a tak lze na přímce o najít bod G, jenž splňuje požadavky úlohy. Z podmínky rovnosti obsahů doplňkových čtyřúhelníků $BKGN$ a $DMGL$ analogicky zjistíme, že bod G leží i na ose o' pásu ohraničeného přímkami r a s vedenými body B a D rovnoběžně s přímkou AC, přičemž

$$S_{BKGN} = S_{DMGL} = \frac{1}{4} S.$$



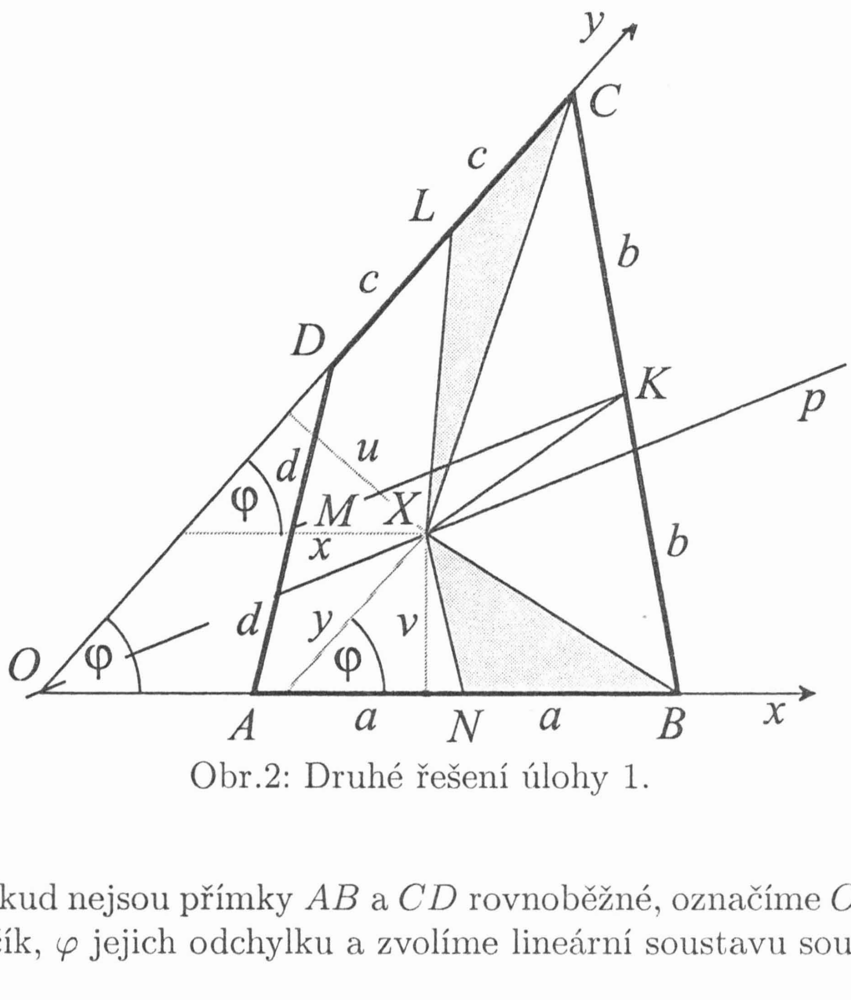
Obr. 1: První řešení úlohy 1.

Úloha má právě jedno řešení, $G : o \cap o'$, neboť osy o a o' jsou různoběžné a protínají se uvnitř (Varignonova) čtyřúhelníku $KLMN$.

Druhé řešení. Hledejme nejprve (v rovině čtyřúhelníku $ABCD$) množinu všech bodů X, pro něž mají čtyřúhelníky $BKXN$ a $CLXK$ stejný obsah. Trojúhelníky CKX a BKX mají stejné obsahy, neboť se shodují v základnách BK, CK a mají společnou výšku z vrcholu X. Proto platí $S_{BKXN} = S_{CLXK}$, právě když $S_{NBX} = S_{CLX}$. Poslední rovnost je ekvivalentní se vztahem

$$av = cu, \tag{3}$$

kde $a = |AB|/2$, $c = |CD|/2$ a proměnné u, v jsou po řadě vzdálenosti bodu X od přímek CD, AB. Označme p množinu všech bodů X, pro něž $S_{NBX} = S_{CLX}$. Jsou-li přímky AB a CD rovnoběžné; je zřejmě p přímka s nimi rovnoběžná a prochází bodem P, který dělí každou úsečku YZ, kde $Y \in CD$, a $Z \in AB$, v poměru $|YP| : |PZ| = a : c$.



Obr.2: Druhé řešení úlohy 1.

Pokud nejsou přímky AB a CD rovnoběžné, označíme O jejich průsečík, φ jejich odchylku a zvolíme lineární soustavu souřadnic

$\langle O, x, y\rangle$ podle obr. 2. Rovnici (3) vydělíme výrazem $\sin\varphi$ a po substituci $x = u/\sin\varphi$ a $y = v/\sin\varphi$ upravíme na tvar

$$y = \frac{c}{a}x, \tag{4}$$

což je ve zvolené soustavě souřadnic rovnice přímky, kterou snadno sestrojíme. Například jako přímku OQ, kde $Q = [a, c]$.

Zjistili jsme, že pro obě situace je množinou p přímka, kterou umíme sestrojit. Povšimněme si ještě, že i $S_{LDX} = S_{CLX} = S_{NBX} = S_{ANX}$ a $S_{DMX} = S_{MAX}$. Odtud $S_{DMXL} = S_{ANXM}$ a můžeme učinit závěr:

Množinou všech bodů X, které leží uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ a pro něž platí

$$S_{BKXN} = S_{CLXK} \quad \textit{a zároveň} \quad S_{ANXM} = S_{DMXL}, \tag{5}$$

je průnik přímky p a vnitřku čtyřúhelníka $ABCD$. Přitom je přímka p určena libovolnými dvěma body P, Q ($P \neq Q$), které leží v průniku polorovin ABC a CDA a pro něž platí $|P, \leftrightarrow DC| : |P, \leftrightarrow AB| = a : c = |AB| : |DC| = |Q, \leftrightarrow DC| : |Q, \leftrightarrow AB|$.

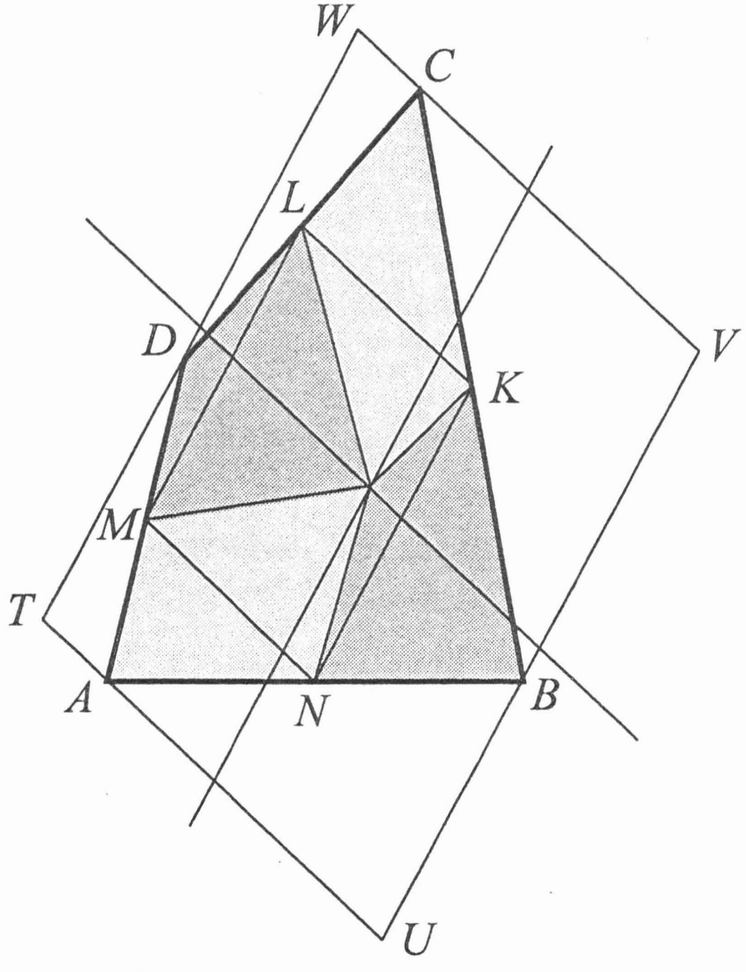
Po cyklické záměně bodů A, B, C, D a současně bodů K, L, M, N v předchozích úvahách analogicky zjistíme:

Množinou všech bodů X, které leží uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ a pro něž platí

$$S_{CLXK} = S_{DMXL} \quad \textit{a zároveň} \quad S_{BKXN} = S_{ANXM}, \tag{6}$$

je průnik přímky p' a vnitřku čtyřúhelníka $ABCD$. Přitom je přímka p' určena libovolnými dvěma body P', Q' ($P' \neq Q'$), které leží v průniku polorovin BCD a DAB a pro něž platí $|P', \leftrightarrow AD| : |P', \leftrightarrow BC| = b : d = |BC| : |AD| = |Q', \leftrightarrow AD| : |Q', \leftrightarrow BC|$.

Závěr. Čtyřúhelníky $ANGM$, $BKGN$, $CLGK$ a $DMGL$ mají stejný obsah, právě když je bod G průnikem přímek p a p'. Úloha má vždy jediné řešení, neboť jsou tyto přímky různoběžné a protínají se uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$.



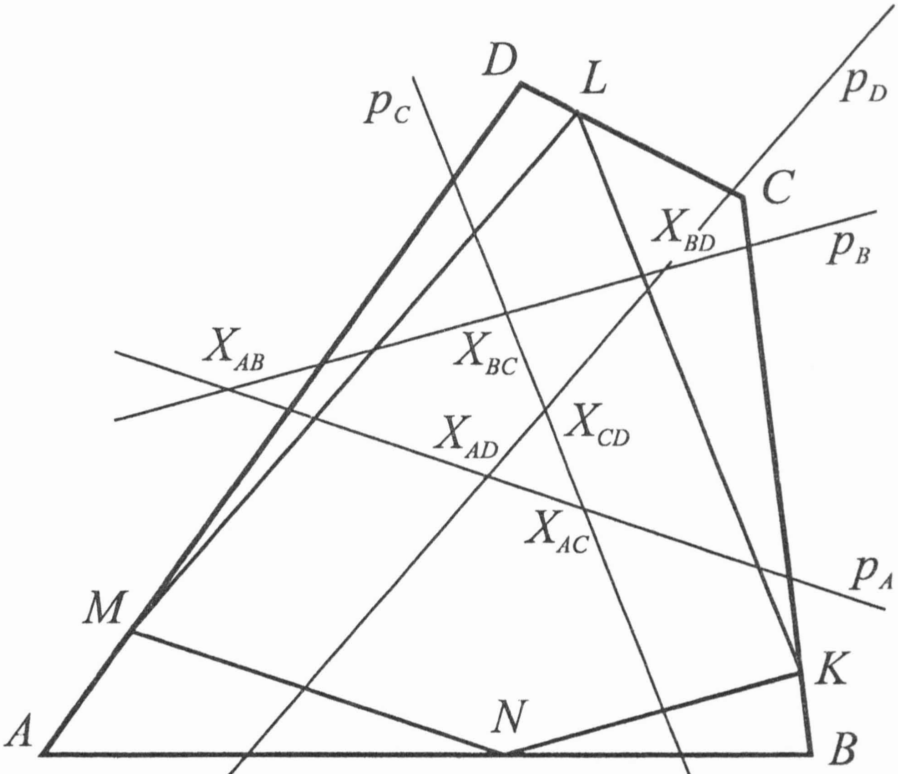
Obr. 3: Poznámka k prvnímu řešení úlohy 1.

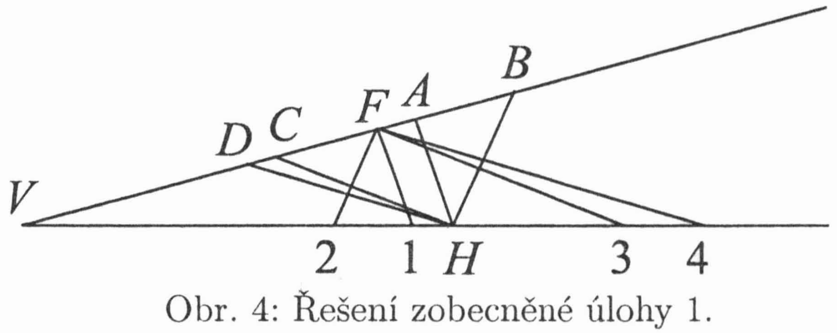
Závěrečné poznámky. V prvním řešení si čtenář asi uvědomil, že bod G je středem rovnoběžníku $TUVW$, který je průnikem dvou rovinných pásů, jejichž hranice jsou rovnoběžné s úhlopříčkami BD a AC. Platí $S_{TUVW} = 2S_{ABCD}$ a bod G lze nalézt i jako průsečík úhlopříček TV a WU. Vnímavý pozorovatel, který zná vztah $S = zv/2$ pro obsah trojúhelníku, by mohl celé řešení pochopit jen z pohledu na obr. (3) (tzv. řešení beze slov).

Analogicky snadno vyřešíme i obecnější variantu úlohy 1, v níž jsou body K, L, M a N umístěny libovolně uvnitř stran BC, CD, DA a AB (nemusí být v jejich středech): Předpokládejme, že obsah trojúhelníku ANM je menší než čtvrtina obsahu čtyřúhelníku

$ABCD$ a položme $|MN| = m_A$, ve vztahu (1) pak $|BD| = 2f$ a $v = 2h$. Jak snadno ověříme, je množinou vrcholů X všech (ne nutně konvexních) čtyřúhelníků $ANXM$, které mají obsah $S_{ANXM} = S_{ABCD}/4$ a vrchol X uvnitř poloroviny MNC, ta přímka p_A uvnitř zmíněné poloroviny, jež je rovnoběžná s úsečkou MN a má od bodu A vzdálenost u_A, pro niž platí

$$\frac{u_A}{f} = \frac{h}{m_A}.$$





Obr. 4: Řešení zobecněné úlohy 1.

K analogickým vztahům podobně dospějeme i pro čtyřúhelníky $BKXN$, $CLXK$ a $DMXL$. Délky u_A, u_B, u_C a u_D pak můžeme sestrojit z nalezených vztahů jako tzv. čtvrté geometrické úměrné. Na obr. (4) je naznačen postup konstrukce přímek p_A, p_B, p_C a p_D. Dolní část obrázku představuje pomocné konstrukce délek u_A, u_B, u_C a u_D. Úsečky VF a VH mají délky f a h. Vzdálenosti bodů 1, 2, 3 a 4 od bodu V jsou po řadě m_A, m_B, m_C a m_D. Pomocí rovnoběžek jsou pak v dolní části obrázku sestrojeny body A, B, C a D, pro něž zřejmě platí $|VA| = u_A$, $|VB| = u_B$, $|VC| = u_C$ a $|VD| = u_D$. S využitím těchto délek jsou nakonec v horní části obrázku známým způsobem sestrojeny přímky p_A, p_B, p_C, p_D (dílčí konstrukce jsou skryty).

Každý z šesti možných průsečíků přímek p_A, p_B, p_C a p_D představuje bod, pro nějž mají příslušné dva čtyřúhelníky stejný obsah (rovný čtvrtině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$). Například pro bod $X = X_{AB}$ platí $S_{ANXM} = S_{BKXN} = S_{ABCD}/4$. Úloha může mít jen jediné řešení, které nastane, právě když mají všechny čtyři přímky p_A, p_B, p_C a p_D společný právě jeden bod G ležící uvnitř čtyřúhelníku $KLMN$. (Stačí ovšem, aby se tři z nich protínaly v jediném bodě. Čtvrtá přímka již nutně prochází průsečíkem prvních tří.)

V souvislosti s těmito úvahami můžeme vytvářet různě obtížné problémy. Některé z nich přenechávám čtenáři v úlohách na konci článku, neboť řešit úlohy se naučíme nejlépe praktickou činností. Konstrukce lze provádět pomocí Cabri nebo jiného z nástrojů dynamické geometrie. V souvislosti s tím čtenáři doporučuji seznámit se s monografií [6] Jiřího Vaníčka, v níž je řada pěkných námětů pro práci s žáky doplněna ukázkami i pracovními soubory na příloze CD.

Na závěr si nemohu odpustit poznámku k poněkud diskutabilním termínům *důkladné porozumění elementární matematice* a *dokonalé porozumění elementární matematice.* O kom lze totiž říci, že důkladně či dokonale rozumí celé elementární matematice? Na základě informací ze zdroje [7] se domnívám, že v obou případech jde o nepřesný překlad názvu *profound understanding of fundamental mathematics.* Paní Liping Ma patrně termínem *fun-*

damental mathematics rozumí souhrn předpokládaných základních matematických poznatků nějakého jedince (například učitele nebo žáka). Nikoliv tedy elementární matematiku, která je v obvyklém pojetí součástí matematiky jako vědy. Proto by bylo snad vhodnější užívat termín *hluboké porozumění matematickému základu*. Přitom jako *matematický základ* označujeme souhrn základních matematických poznatků, které si jedinec osvojil a který pro skupinu osob, jež dosáhly téhož vzdělání určuje kurikulum. Rozdílná představa matematického základu dnešního středoškoláka zřejmě způsobila i nedorozumění mezi profesorem Dlabem a některými českými matematiky (viz články [2] a [3]). Vztahu $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ mezi délkami stran a úhlopříček rovnoběžníku byla snad na školách věnována ve čtyřicátých létech větší pozornost. Dnes, na rozdíl od kosinové věty, není zařazen ani do kurikula středoškoláků. V současných středoškolských učebnicích se vyskytuje okrajově, v úlohách k procvičení kosinové věty (viz například [5], úloha 144 na str. 240 s řešením na str. 514 nebo [4], úloha 4.49).

Další úlohy

1. Podle obr. (4) sestrojte v programu Cabri nebo GeoGebra přímky p_A, p_B, p_C, p_D a nastavováním různých poloh bodů K, L, M, N modelujte řešení úlohy (tzn. situace, kdy se přímky protínají v jediném bodě G). Zabývejte se též situacemi, kdy je $KL \| MN$ nebo $KN \| LM$.

2. Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsán rovnoběžník $KLMN$, přičemž jeho strany KL a NM jsou obrazy úhlopříčky BD ve stejnolehlostech se středy C, D a koeficientem λ $(0 < \lambda < 1)$. V rovnoběžníku $KLMN$ sestrojte bod G tak, aby
$$S_{ANGM} = S_{CLGK} \quad \text{a} \quad S_{BKGN} = S_{DMGL}.$$
Pomocí λ vyjádřete poměr obsahů čtyřúhelníků $ANGM$ a $BKGN$.

3. V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a body M, N po řadě uvnitř stran AD, AB tak, že $S_{ANM} < S_{ABCD}/4$. Sestrojte úsečku $KL \| MN$ tak, aby body K, L ležely po řadě uvnitř stran BC, CD a aby (při označení použitém v našem článku) platilo $p_C = p_A$. Dále sestrojte na přímce $p = p_C = p_A$ bod G tak, aby měly čtyřúhelníky $ANGM$, $BKGN$, $CLGK$ a $DMGL$ stejný obsah. Stanovte podmínky řešitelnosti.

4. S využitím vztahu (1) dokažte, že ze všech čtyřúhelníků vepsaných do daného kruhu má největší obsah čtverec.

Literatura

[1] Bečvář, J., Dlab, V., Rozdělení čtyřúhelníku na čtyři části stejného obsahu, *Učitel matematiky* **72**(2009), 213-221.

[2] Dlab, V., Důkladné porozumění elementární matematice, *Učitel matematiky* **71**(2009), 169-182.

[3] Kuřina, F., Chvála „biflování", *Učitel matematiky*, **73**(2009), 49-52.

[4] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*, Prometheus, Praha, 1994.

[5] Polák, J., *Středoškolská matematika v úlohách II*, Prometheus, Praha, 1999.

[6] Vaníček, J., *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha, 2009.

[7] Liping Ma's Knowing and Teaching Elementary Mathematics: *Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China & the United States*, `http://wiki.math.yorku.ca/index.php`

RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích
katedra matematiky
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
e-mail: leischne@pf.jcu.cz